2Revista ASCE Magazine, Periodicidad: Trimestral Abril - Junio, Volumen: 4, Número: 2, Año: 2025 páginas 1075-1105

Doi: https://doi.org/10.70577/ASCE/1075-1105/2025

Recibido: 2025-04-12

Aceptado:2025-05-12

Publicado:2025-06-16

Análisis comparativo de métodos numéricos para la dinámica de pórticos irregulares con python

Comparative analysis of numerical methods for the dynamics of irregular frames with python

Jorge Javier Analuisa-Sánchez
https://orcid.org/0009-0005-4429-7752
jorge.analuisa@unach.edu.ec
Universidad Nacional de Chimborazo
Riobamba-Ecuador

Andrés Santiago Cisneros-Barahona
https://orcid.org/0000-0002-2524-041X
ascisneros@unach.edu.ec
Universidad Nacional de Chimborazo
Riobamba -Ecuador

Cómo citar

Analuisa-Sánchez , J. J., & Cisneros-Barahona , A. S. (2025). Análisis comparativo de métodos numéricos para la dinámica de pórticos irregulares con python. *ASCE*, *4*(2), 1075–1105.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Resumen

Este estudio comparó métodos de integración numérica directa para el análisis dinámico de estructuras, un problema crítico en ingeniería civil, especialmente en edificaciones irregulares sometidas a cargas sísmicas u otras cargas dinámicas. Para analizar cuantitativamente el desempeño de tres algoritmos clave (diferencias centrales, Newmark-β y Wilson-θ), se utilizó una implementación rigurosa en Python, apoyada por las bibliotecas NumPy y Matplotlib. La evaluación se realizó en un modelo realista de un pórtico irregular de cuatro niveles, aplicando una carga armónica externa y considerando las matrices de masa, amortiguamiento (Rayleigh) y rigidez del sistema. Los resultados demostraron que el método de Newmark-β ofreció el mejor equilibrio entre precisión, estabilidad y eficiencia computacional. Por su parte, Wilson-θ presentó mayor robustez a costa de un mayor costo computacional, mientras que el método de diferencias centrales, aunque rápido, evidenció limitaciones significativas en estabilidad. Esta investigación proporciona criterios prácticos y cuantitativos para seleccionar el método de integración más adecuado según las necesidades de cada proyecto. Estudios futuros explorarán la aplicación de estos métodos en análisis no lineales y con cargas sísmicas reales, así como la implementación de versiones paralelas (CUDA/multiprocessing) para mejorar el rendimiento en modelos de gran escala.

Palabras clave*:* Métodos De Integración, Dinámica Estructural, Pórticos Irregulares, Diferencias Centrales, Newmark-β, Wilson-θ.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Abstract

This study compared direct numerical integration methods for the dynamic analysis of structures, a critical problem in civil engineering, especially in irregular buildings subjected to seismic or other dynamic loads. To quantitatively analyze the performance of three key algorithms (central differences, Newmark-β, and Wilson-θ), a rigorous implementation in Python was utilized, supported by the NumPy and Matplotlib libraries. The evaluation was conducted on a realistic model of a four-level irregular frame, applying an external harmonic load and considering the mass, damping (Rayleigh), and stiffness matrices of the system. The results demonstrated that the Newmark-β method offered the optimal balance between accuracy, stability, and computational efficiency. In turn, Wilson-θ presented greater robustness at the expense of higher computational cost, while the central difference method, though fast, showed significant stability limitations. This research provides practical and quantitative criteria for selecting the most suitable integration method based on the needs of each project. Future studies will explore the application of these methods to nonlinear analyses and real seismic loads, as well as the implementation of parallel versions (CUDA/multiprocessing) to enhance performance in large-scale models.

Keywords: integration methods, structural dynamics, irregular frames, central differences, Newmark-β, Wilson-θ.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Introducción

La dinámica de estructuras representa un eje fundamental en la ingeniería civil y la arquitectura, ya que facilita el entendimiento de cómo responden las construcciones a cargas fluctuantes, como sismos, ráfagas de viento o vibraciones mecánicas Krishnan & Thasleen (2020). En este contexto, los pórticos irregulares, caracterizados por discontinuidades en masa, rigidez o geometría, constituyen un reto técnico significativo debido a su compleja interacción modal y su potencial inestabilidad ante diversos estímulos dinámicos Blasi et al. (2024).

Dado que las soluciones analíticas son inviables para estructuras complejas como los pórticos irregulares, los métodos de integración numérica se vuelven herramientas esenciales Chopra (2020). Este trabajo compara tres de los algoritmos más utilizados en la práctica estructural: *diferencias centrales*, *Newmark* y *Wilson* Chopra (2020). Aunque sus formulaciones y requerimientos computacionales difieren, todos permiten aproximar la respuesta de Sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MDOF). La contribución de este estudio radica en evaluar en profundidad las ventajas y limitaciones de cada método mediante su aplicación a un modelo realista de pórtico irregular de cuatro niveles. Esta tipología fue seleccionada por su representatividad en contextos urbanos, particularmente en regiones donde la construcción de viviendas unifamiliares con niveles parciales es común.

Antecedentes y Estado del Arte de Métodos Numéricos

En los últimos años, los estudios sobre dinámica estructural han experimentado un avance notable gracias a la evolución de métodos numéricos, lo que ha permitido una mejor comprensión del comportamiento de las estructuras ante diversas cargas dinámicas, que van desde sismos hasta vibraciones ocasionadas por el viento. En este contexto, los métodos de integración directa han emergido como herramientas fundamentales en el análisis estructural, proporcionando soluciones aproximadas a problemas que resultarían extremadamente complicados de resolver por métodos analíticos exactos Vu & Tuan (2010). Entre los más utilizados destacan el método de diferencias centrales, el método de Newmark y el método de Wilson Lima (2024). Aunque estos métodos han sido objeto de extensas investigaciones y aplicaciones, aún existe un amplio campo por explorar y descubrir, sobre todo en contextos más complejos y realistas, como estructuras con geometría

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

irregular, comportamiento no lineal o interacciones suelo-estructura, tal como señala Hernández González (2020) en su tesis doctoral.

La **Tabla 1** sintetiza estudios relevantes sobre métodos de integración numérica en análisis estructural dinámico. Como se aprecia, la mayor parte de los trabajos analizados emplean estos métodos en modelos simplificados, principalmente de un grado de libertad (1GDL), o en estructuras con condiciones ideales de simetría en masa y rigidez. Entre las excepciones, Blasi et al. (2024) examinan una estructura irregular con múltiples grados de libertad, aunque su enfoque se limita a evaluar la respuesta sísmica sin contrastar distintos esquemas numéricos. Además, se identifica una carencia de implementaciones reproducibles en entornos de código abierto (e.g., Python), lo cual dificulta la validación y replicabilidad de los resultados. Esta brecha en la literatura motiva la presente investigación.

Tabla 1. Resumen comparativo de estudios relevantes sobre métodos de integración numérica en análisis estructural dinámico

Estudio	Método(s)	Tipo de estructura	Grado de libertad	Irregularidad considerada	Lenguaje o plataforma
Hernández & Candia (2021)	Newmark, Wilson	Viga simple	1 GDL	No	MATLAB
Vásconez et al. (2016)	Newmark, Wilson	Pórtico simétrico	MDOF	No	SAP2000
Huancapaza (2021)	Diferencias centrales	Modelo básico	1 GDL	No	Python
Bohórquez (2016)	Wilson-θ	Sistema rígido idealizado	1 GDL	No	Fortran
Blasi et al. (2024)	N/A (sismo real)	Edificio irregular	MDOF	Sí	OpenSees

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

La técnica de diferencias centrales es simple y efectiva en muchas situaciones, aunque su estabilidad condicional la limita en sistemas con alta rigidez o comportamientos no lineales Magisano et al. (2022). Este método se basa en determinar los desplazamientos a partir de condiciones anteriores de manera rápida, y su principal inconveniente radica en la dependencia del paso de tiempo utilizado. Los debates sobre su aplicabilidad en estructuras más sofisticadas han surgido debido a su vulnerabilidad a la inestabilidad numérica Ghiassi & Milani (2019). Sin embargo, en diseños básicos o bajo un control más riguroso del proceso de integración, sigue siendo una alternativa válida y útil.

En cambio, el método de Newmark se ha consolidado como una de las técnicas más sólidas en el ámbito del análisis estructural, gracias a su enfoque implícito, que permite obtener soluciones más consistentes, incluso cuando se emplean pasos de tiempo amplios. Debido a esta capacidad de adaptación, se ha convertido en un referente dentro de numerosos programas de análisis estructural. Su eficacia ha sido demostrada en simulaciones complejas, especialmente en estructuras con comportamientos no lineales Chan (2009). No obstante, como cualquier herramienta, enfrenta ciertos desafíos, como la demanda de un mayor tiempo de cálculo y, en el caso de estructuras muy extensas, la necesidad de una mayor capacidad de procesamiento.

Por otro lado, la técnica de Wilson fue desarrollada con el propósito de optimizar la estabilidad en comparación con otros métodos existentes. Sus características más destacadas incluyen la incorporación del factor corrector, conocido como θ, el cual permite ampliar el rango de estabilidad sin comprometer la exactitud de los resultados obtenidos. Asimismo, se ha demostrado que sus resultados pueden ser especialmente valiosos en el análisis de sistemas rígidos o en situaciones donde se presentan cargas pulsantes. El método de Wilson representa una ampliación del método de Newmark, que perfecciona la precisión al anticipar la respuesta estructural frente a condiciones dinámicas extremas. No obstante, su eficacia también implica un mayor requerimiento computacional, lo que podría convertirse en una limitación en estructuras de gran escala si no se dispone de los recursos adecuados.

Hernández (2020) señala que la mayor parte de las validaciones y comparaciones de métodos numéricos, como los mencionados anteriormente, se han realizado principalmente en modelos

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

simples de un solo grado de libertad o en estructuras con características ideales. Además, menciona que, en estructuras más complejas, como pórticos irregulares de múltiples grados de libertad (MDOF), la distribución desigual de masas y rigideces puede dar lugar a errores numéricos que afectan la precisión del análisis, tema que se aborda como una limitación y una zona de interés para futuras investigaciones. Vásconez et al. (2021) advierten que los métodos numéricos deben analizarse en condiciones más cercanas a la realidad constructiva, ya que es allí donde surgen los verdaderos retos en términos de estabilidad y convergencia.

El propósito del presente estudio es determinar cuál de los métodos de integración directa (diferencias centrales, Newmark o Wilson) ofrece un mejor desempeño, mediante una evaluación cuantitativa de su rendimiento al aplicarlos a pórticos MDOF con irregularidades. La elección de un pórtico irregular no es arbitraria: debido a su estructura asimétrica y distribución de cargas no uniforme, exhiben dinámicas más complejas, lo que los hace un escenario ideal para evaluar las capacidades y limitaciones de los métodos mencionados. En este contexto, se ofrece un análisis alternativo que busca complementar los estudios existentes y que servirá como guía para investigadores e ingenieros estructurales que necesitan elegir el método más adecuado según las condiciones específicas de sus proyectos. Como señala Navarro Crespo (2020), la aplicabilidad práctica de un método numérico no se define únicamente por su estabilidad teórica, sino por su comportamiento real en estructuras complejas, donde factores como la precisión y la eficiencia computacional son determinantes.

Método

Este estudio siguió un enfoque cuantitativo basado en simulación, centrado en la comparación del desempeño de los métodos de integración numérica directa: Diferencias Centrales, Newmark-β y Wilson-θ. El objetivo fue simular la respuesta dinámica de un pórtico irregular de cuatro niveles bajo una carga armónica. La implementación computacional se realizó en Python, utilizando bibliotecas especializadas para el análisis matricial y la visualización de resultados Dewey et al. (2023).

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Protocolo de Análisis

La metodología de este estudio se estructuró en varias fases clave para garantizar una evaluación comparativa rigurosa. Inicialmente, se realizó un análisis modal del pórtico para comprender sus características dinámicas fundamentales. Posteriormente, se llevaron a cabo simulaciones numéricas utilizando cada uno de los métodos de integración bajo las mismas condiciones iniciales. Los resultados obtenidos fueron comparados en nodos clave, analizando métricas de precisión, estabilidad y eficiencia computacional. Finalmente, se generaron gráficos y tablas comparativas para sintetizar y visualizar los hallazgos.

Implementación Computacional

El código para este análisis fue desarrollado en Python 3.9, estructurado en módulos para facilitar la reproducibilidad del análisis dinámico del pórtico. Se diseñaron funciones específicas para la implementación de cada método de integración (diferencias centrales, Newmark-β, Wilson-θ), las cuales aceptan como parámetros de entrada las matrices del sistema (masa, amortiguamiento, rigidez), la carga externa, el paso de tiempo y las condiciones iniciales, junto con los parámetros específicos de cada algoritmo (β, γ para Newmark; θ para Wilson).

El proceso de cálculo para cada método involucró la inicialización de variables, la determinación de constantes del método (según corresponda para Newmark y Wilson), la conformación de la matriz de rigidez efectiva y la iteración paso a paso para calcular los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada instante de tiempo. Las simulaciones generaron series temporales de estas variables para cada grado de libertad. Los resultados fueron visualizados utilizando la biblioteca Matplotlib para crear gráficas de desplazamientos, velocidades y aceleraciones versus tiempo, empleando subplots para una presentación organizada y comparativa.

El entorno de desarrollo requirió Python 3.7 o superior, junto con las bibliotecas NumPy para operaciones numéricas y Matplotlib para la visualización de resultados.

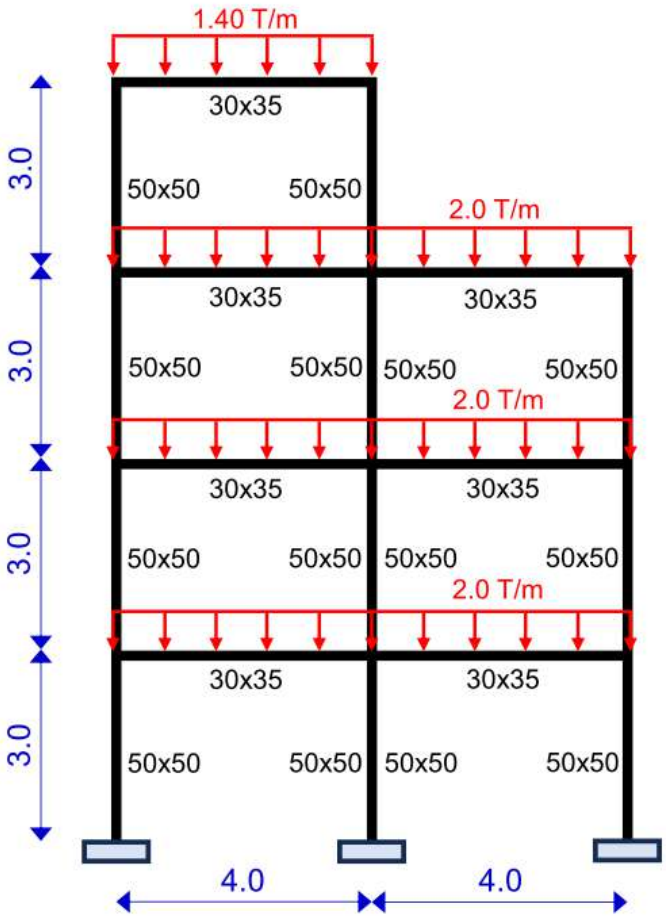
Modelo Estructural

Se consideró un pórtico de hormigón armado de cuatro niveles con las siguientes características:

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

- **Geometría irregular**: Asimetría en planta (forma en L), lo que genera acoplamiento entre los grados de libertad y complejiza su respuesta dinámica Blasi et al. (2024).
- **Dimensiones**: Altura total de 12 m (cuatro niveles de 3 m cada uno); ancho total de 8 m (dos vanos de 4 m cada uno).
- **Propiedades de los materiales**: Módulo de elasticidad E = 25 GPa; Densidad ρ = 2500 kg/m.
- **Elementos estructurales**: Columnas de 50x50 cm y vigas de 30x35 cm.
- **Condiciones de borde**: Empotramiento perfecto en la base.

Figura 1. Modelo del pórtico de estudio.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional
https://magazineasce.com/

Las matrices de masa (M) y rigidez (K) se generaron considerando la masa concentrada en los nudos para el ensamblaje de la matriz de masa diagonal y el método de la rigidez directa para la matriz de rigidez global del sistema.

Parámetros de los Métodos de Integración

Para garantizar una comparación justa y evaluar el comportamiento de los métodos bajo distintas condiciones de estabilidad, se establecieron los siguientes parámetros específicos para cada algoritmo:

- **Método de Diferencias Centrales**:
  - Paso de tiempo (Δt) = 0.001 s (asegurando el cumplimiento de la condición de estabilidad $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$).
  - Amortiguamiento ξ = 5% (tipo Rayleigh), con los coeficientes α y β derivados a partir de los dos primeros periodos naturales del pórtico.
- **Método de Newmark**:
  - Parámetros de integración: γ = 0.5 y β = 0.25 (correspondientes al método de aceleración promedio constante, garantizando estabilidad incondicional).
  - Paso de tiempo (Δt) variable entre 0.001 s y 0.01 s para analizar la sensibilidad.
- **Método de Wilson-θ**:
  - Factor de integración θ = 1.4 (valor óptimo para estabilidad incondicional y mayor precisión).
  - Paso de tiempo (Δt) en el mismo rango de variación que el método de Newmark (entre 0.001 s y 0.01 s).

Carga Armónica Aplicada

La fuerza externa aplicada al pórtico fue definida como una carga armónica con la siguiente formulación:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}_0 \sin(2\pi f t) \quad (5)$$

Donde:

- Frecuencia f = 1.5 Hz (cercana a la frecuencia fundamental del pórtico, lo que puede inducir resonancia).
- Vector de amplitudes de fuerza por nivel $\mathbf{P}_0 = [1.0, 0.8, 0.6, 0.4]'$ kN.
- Duración total de análisis: 10 segundos.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Métricas de Evaluación

Para comparar objetivamente el desempeño de los métodos de integración numérica, se utilizaron las siguientes métricas clave:

1. **Precisión**:
    - Error relativo del desplazamiento máximo (Error RMS) en cada nivel del pórtico, comparado con una solución de referencia (obtenida con un paso de tiempo muy pequeño y/o validada con software comercial).
2. **Estabilidad Numérica**:
    - Evaluación del comportamiento de los métodos ante variaciones del paso de tiempo (Δt), observando la presencia de oscilaciones espurias o divergencia de la solución.
3. **Eficiencia Computacional**:
    - Tiempo de CPU requerido para la simulación completa de cada método.
    - Número de operaciones por paso de tiempo.

Validación del Modelo y Métodos

La implementación computacional y el modelo estructural se validaron rigurosamente mediante dos aspectos fundamentales:

1. ***Comparación con Solución Analítica (Caso de 1 GDL):*** Se comparó la respuesta obtenida por cada método de integración con la solución exacta analítica para un sistema simplificado de un grado de libertad (1GDL) sometido a una carga armónica simple. Este proceso de validación garantizó la correcta implementación de los algoritmos numéricos en Python Hernández (2020). Se evaluó la convergencia mediante el error relativo, definido como:

$$\text{Error} = \frac{\|u_{\text{num}} - u_{\text{ref}}\|}{\|u_{\text{ref}}\|} \quad (6)$$

   donde u_{num} es el desplazamiento numérico y u_{ref} es el desplazamiento de referencia (analítico).
2. ***Análisis Modal y Verificación:*** Se realizó un análisis modal del pórtico para determinar sus periodos naturales de vibración y formas modales. Estos resultados fueron comparados con los obtenidos de análisis estructural con el Sistema de Computación CEINCI-LAB

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Aguiar (2014) y OpenSeesPy Zhu et al. (2018), para verificar la precisión de las matrices de masa y rigidez ensambladas y, por ende, la correcta representación dinámica del modelo estructural.

Resultados y Discusión

Esta sección presenta los hallazgos obtenidos del análisis dinámico comparativo de los métodos de integración numérica Newmark-β, Wilson-θ y Diferencias Centrales, aplicados a un pórtico irregular de cuatro niveles bajo carga armónica. Se evaluaron la respuesta temporal del sistema, la precisión (mediante errores RMS y su dispersión), la estabilidad numérica y la eficiencia computacional. Las Figuras 2 a 9 ilustran la respuesta temporal y los errores asociados, mientras que la Tabla 2 resume los tiempos de ejecución para diferentes pasos temporales.

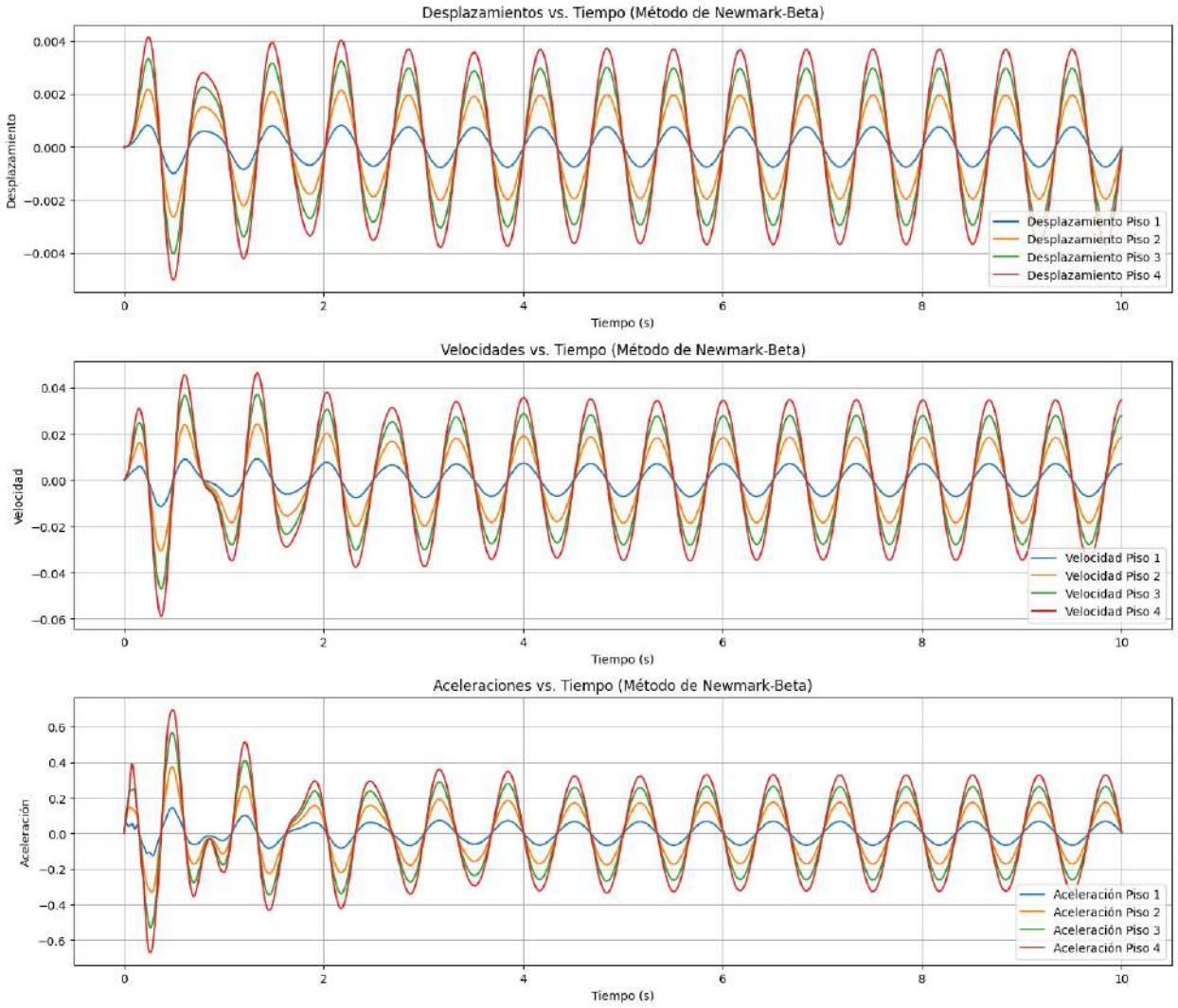
Resultados Principales

Para un paso de tiempo de $\Delta t = 0.001$ s, las respuestas temporales obtenidas con los tres métodos muestran diferencias notables en amplitud y fase. En general, Newmark-β arrojó una respuesta suave y precisa, manteniendo buena estabilidad en todos los grados de libertad. El método de Wilson-θ mostró una respuesta ligeramente más amortiguada, pero con un buen seguimiento modal. Por su parte, el método de Diferencias Centrales presentó ligeras oscilaciones espurias, especialmente en los niveles superiores, lo que indica su sensibilidad a la elección del paso de tiempo.

Respuesta Dinámica del Sistema.

Figura 2. Respuesta del Sistema – Método de Newmark-β a $\Delta t = 0.001$ s.

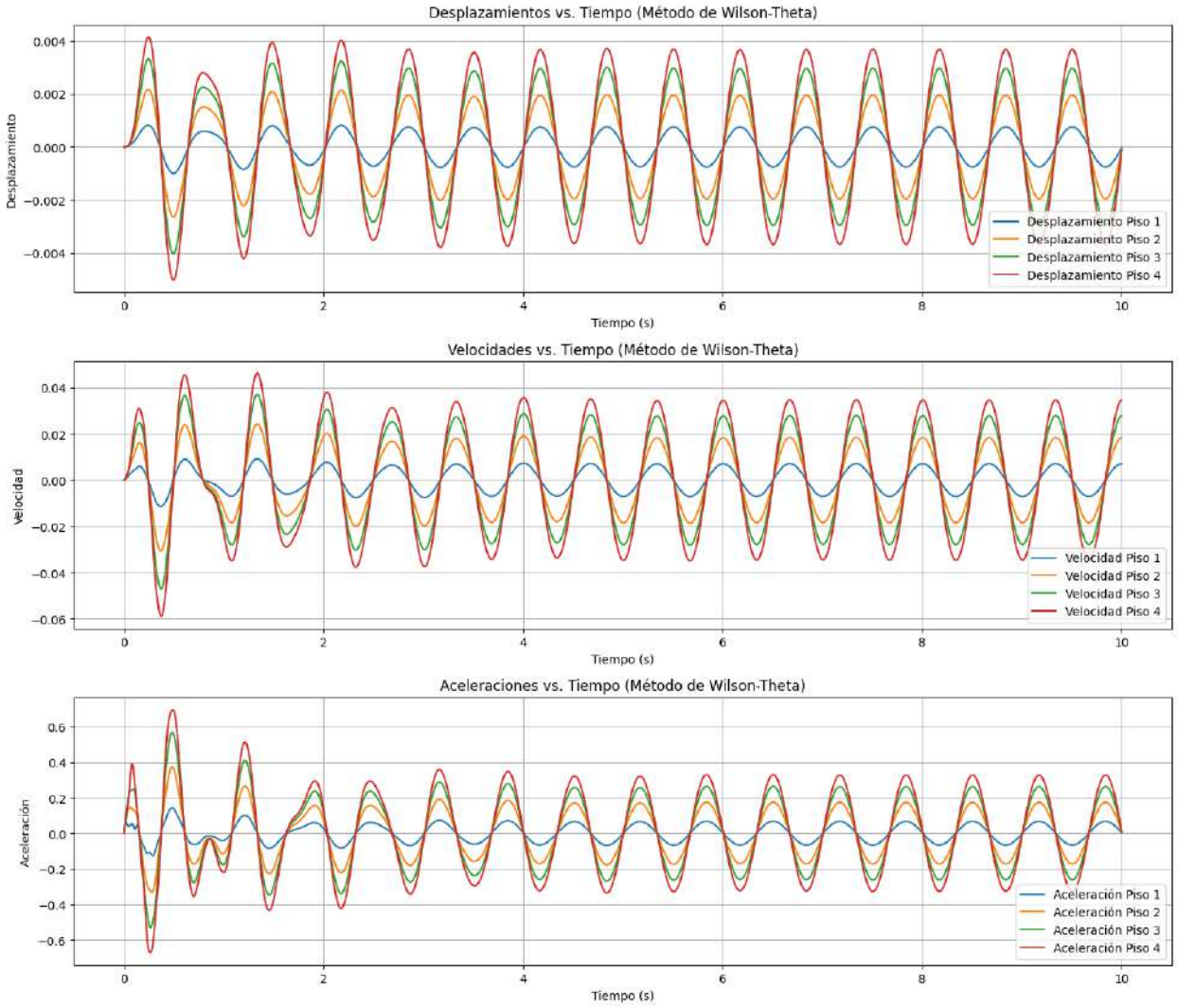
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



La Figura 2 ilustra la evolución temporal de los desplazamientos nodales para los cuatro niveles del sistema con un paso de tiempo de $\Delta t = 0.001$ s. La respuesta es suave y físicamente coherente, lo que indica que el método capturó adecuadamente las resonancias inducidas por la carga armónica sin generar oscilaciones numéricas. La precisión en el seguimiento de las fases sugiere una correcta amortiguación numérica inherente al algoritmo.

Figura 3. Respuesta del Sistema – Método de Wilson-θ a $\Delta t = 0.001$ s.

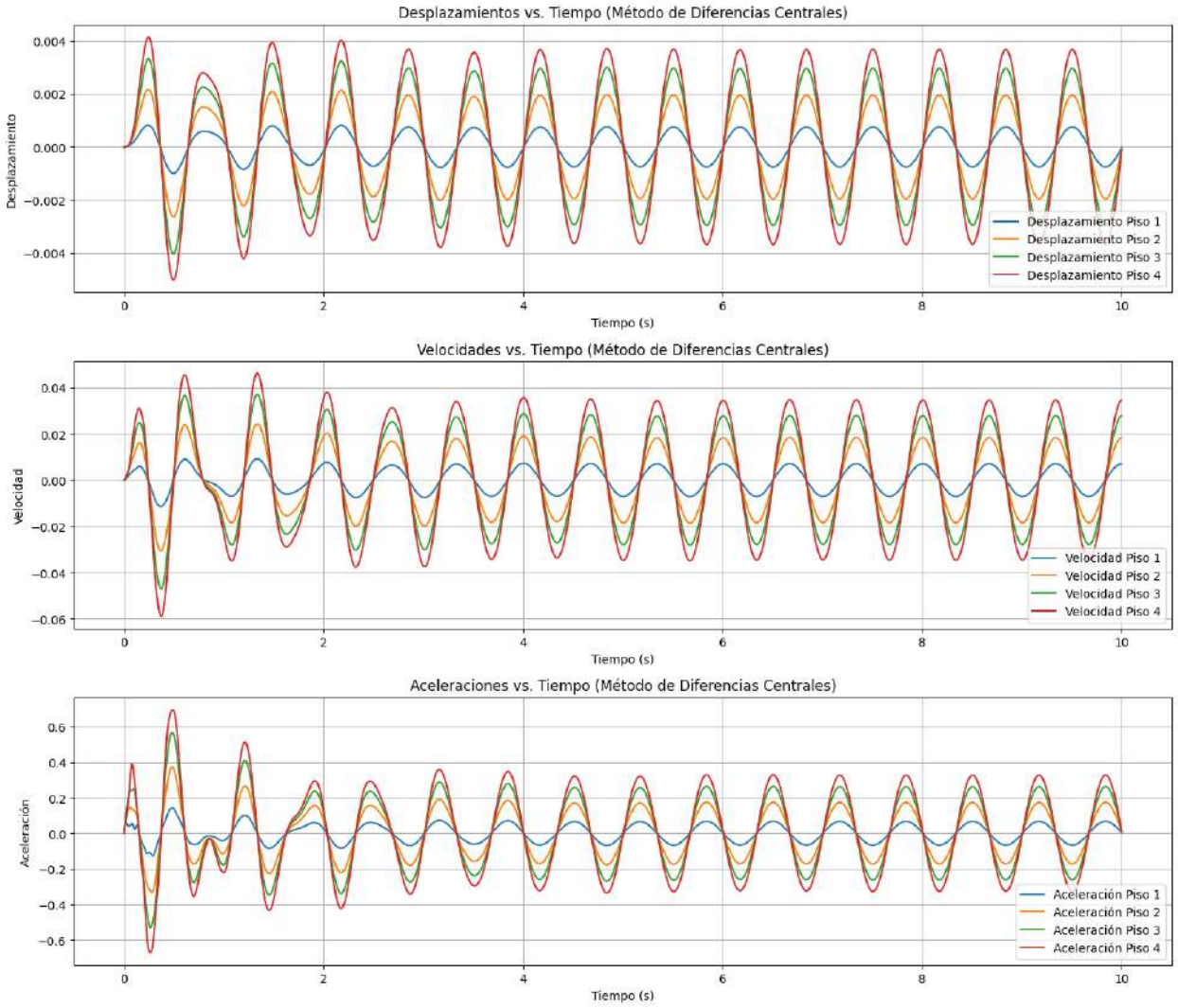
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



La Figura 3 indica que la respuesta calculada mediante el método de Wilson-θ también muestra buena fidelidad. Se observa una ligera atenuación adicional en la amplitud, consecuencia esperada del carácter más difusivo del método. Este resultado confirma su idoneidad para problemas con presencia de modos de alta frecuencia, aunque a costa de una mayor carga computacional.

Figura 4. Respuesta del Sistema – Método de Diferencias Centrales a $\Delta t = 0.001$ s.

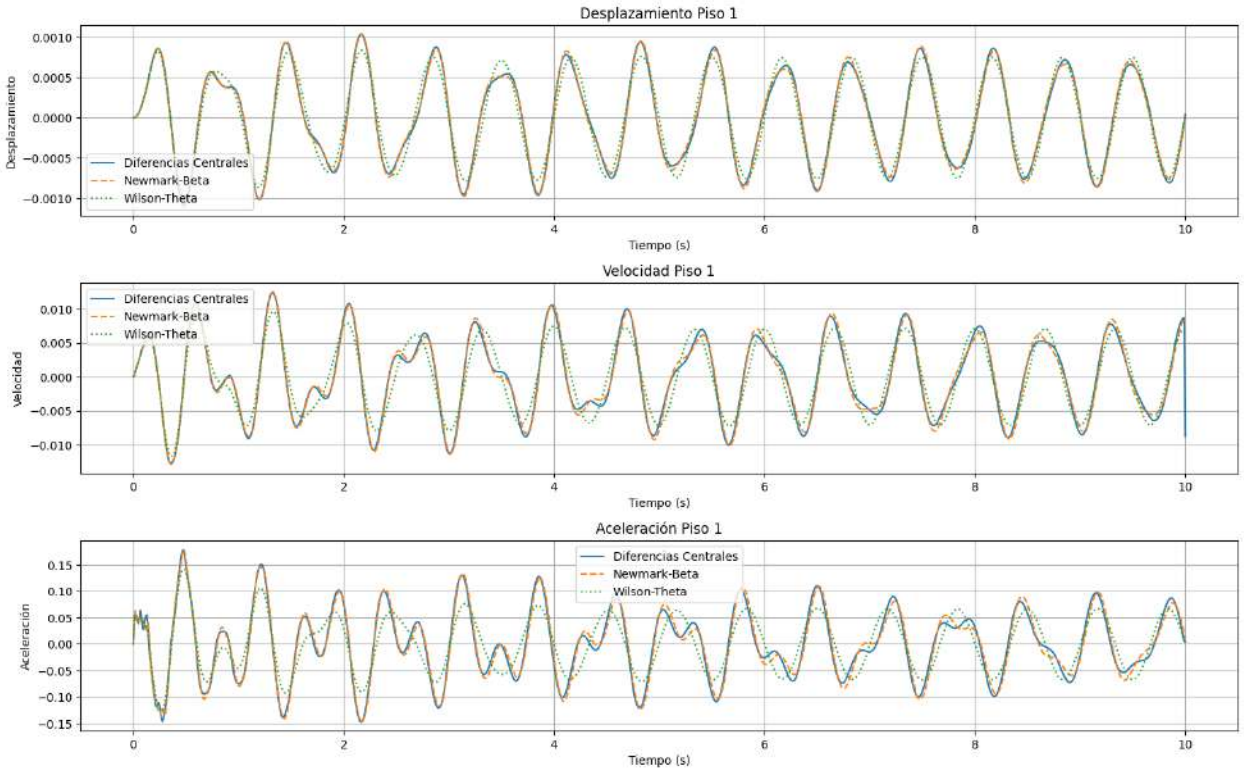
Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



En la Figura 4 se observa que la respuesta obtenida con Diferencias Centrales presenta ligeras oscilaciones parásitas, especialmente en los niveles superiores. Estas distorsiones son consistentes con la sensibilidad del método a la elección del paso temporal. Aunque $\Delta t = 0.001$ s está por debajo del límite teórico de estabilidad, cualquier reducción adicional del paso no resultaría eficiente computacionalmente.

Figura 5. Comparativa de la respuesta de los métodos para el Nivel 1 a $\Delta t = 0.001$ s.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

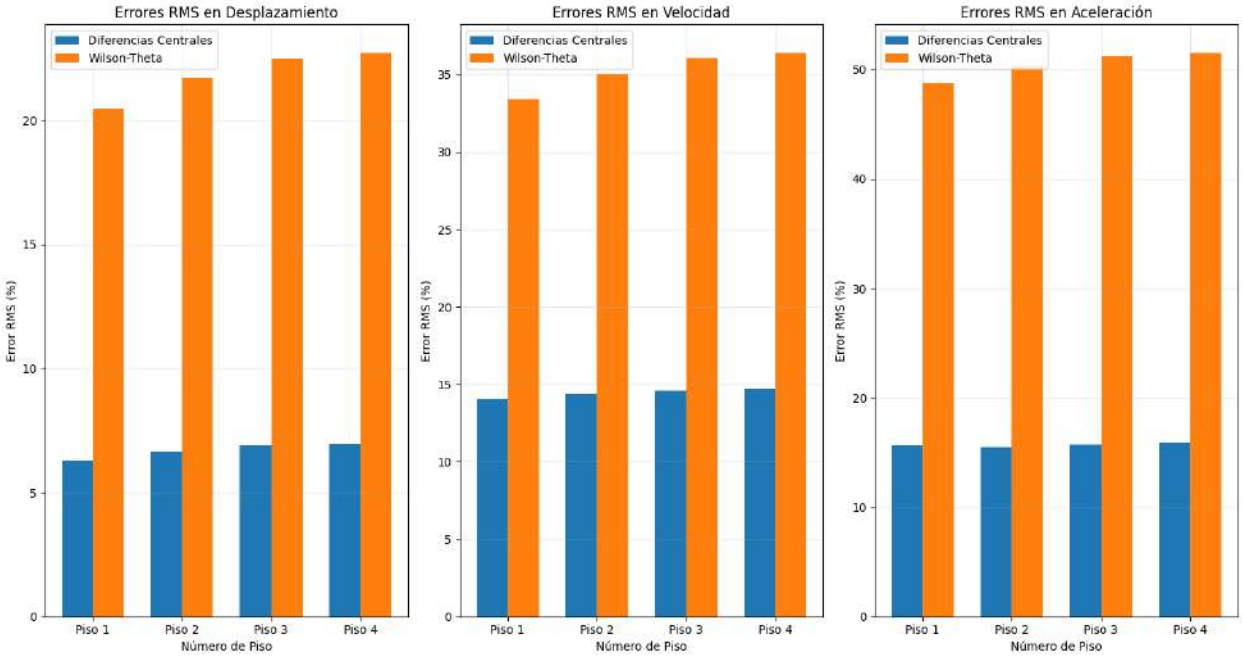


En la Figura 5 se observa la superposición de las respuestas de los tres métodos para el primer nivel. Newmark-β y Wilson-θ prácticamente coinciden, evidenciando la similitud en su formulación implícita y capacidad de integración estable. Por el contrario, el método de Diferencias Centrales exhibe un leve desfase temporal y errores en amplitud, lo que indica menor precisión para capturar la fase exacta de la respuesta estructural.

Análisis de Errores.

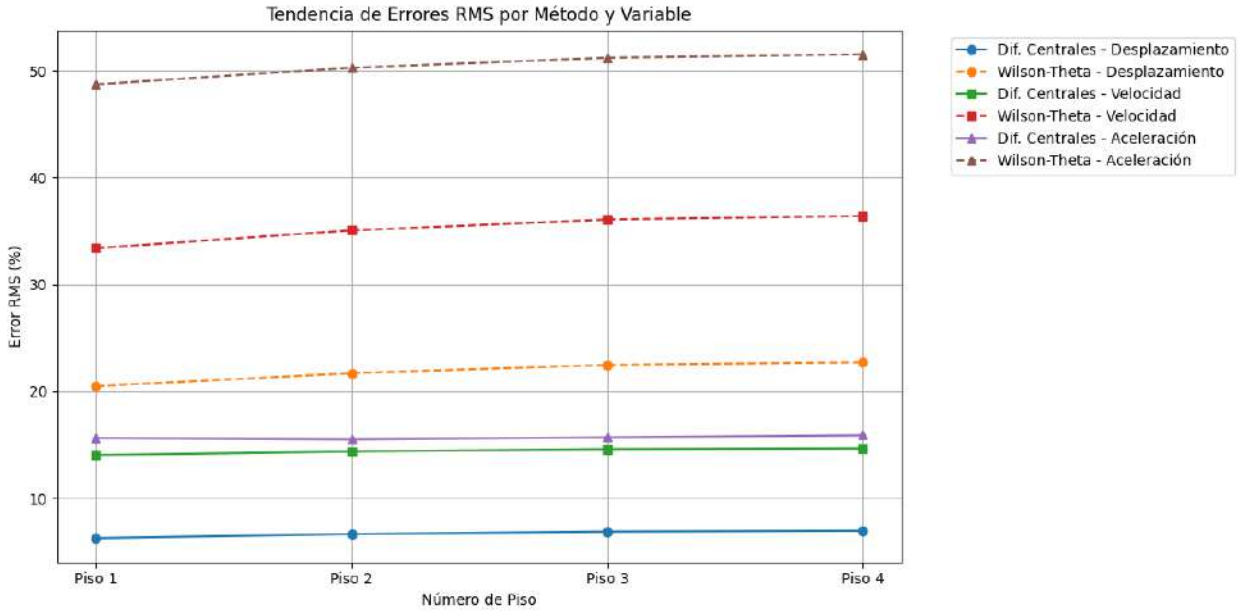
Figura 6. Errores Relativos (usando Newmark-β como referencia).

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



En la Figura 6 se cuantifican los errores relativos de los métodos Wilson-θ y Diferencias Centrales, tomando como referencia la solución obtenida con Newmark-β. Los errores del método de Wilson-θ se mantienen por debajo del 3%, mientras que los del método de Diferencias Centrales superan en algunos instantes el 10%. Esto subraya la necesidad de precaución en la aplicación de Diferencias Centrales, especialmente cuando se requiere alta fidelidad en la predicción.

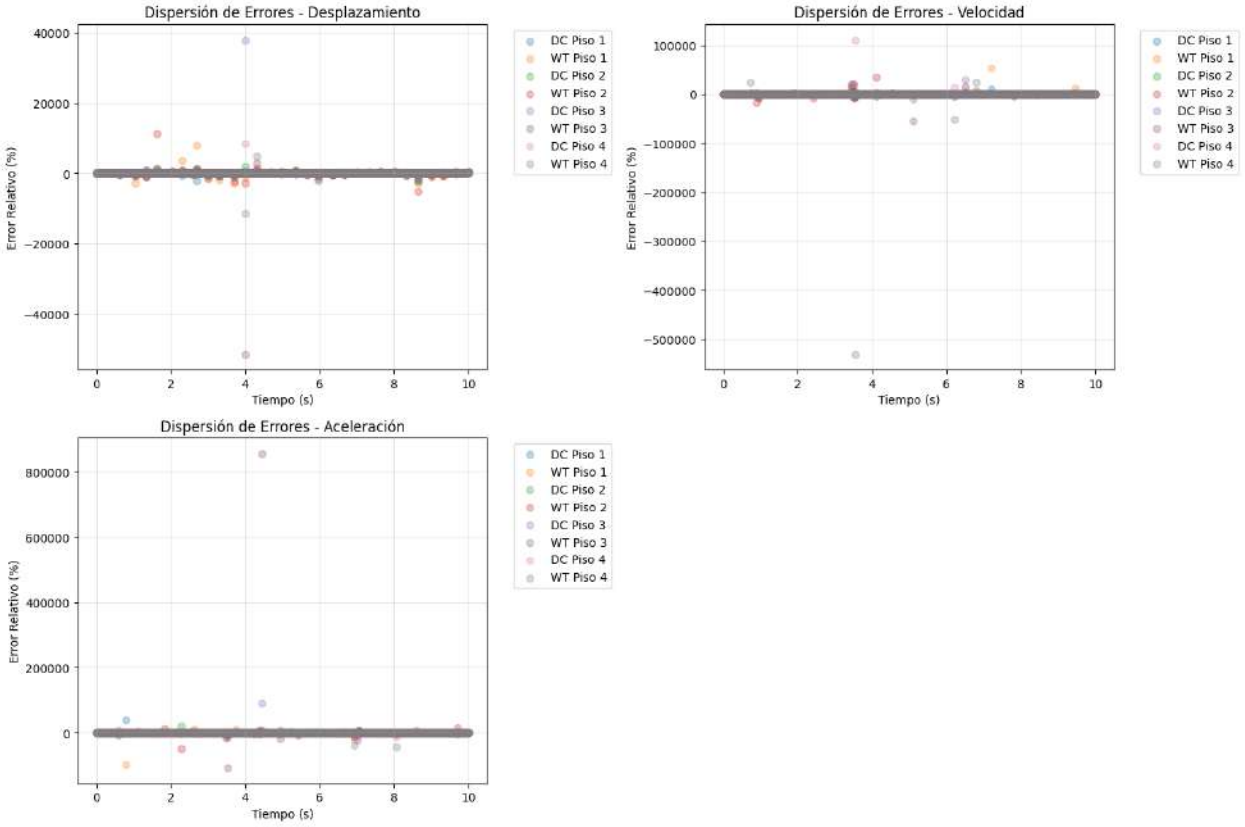
Figura 7. Tendencia de los Errores RMS por Método y Variable.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

La Figura 7 resume el comportamiento global de los errores RMS para los métodos. Se confirma que Newmark-β y Wilson-θ tienen errores acumulados significativamente menores que el método explícito, especialmente cuando se evalúan en la ventana completa de integración. Este análisis corrobora la superioridad de los métodos implícitos en contextos donde se requiere alta precisión temporal.

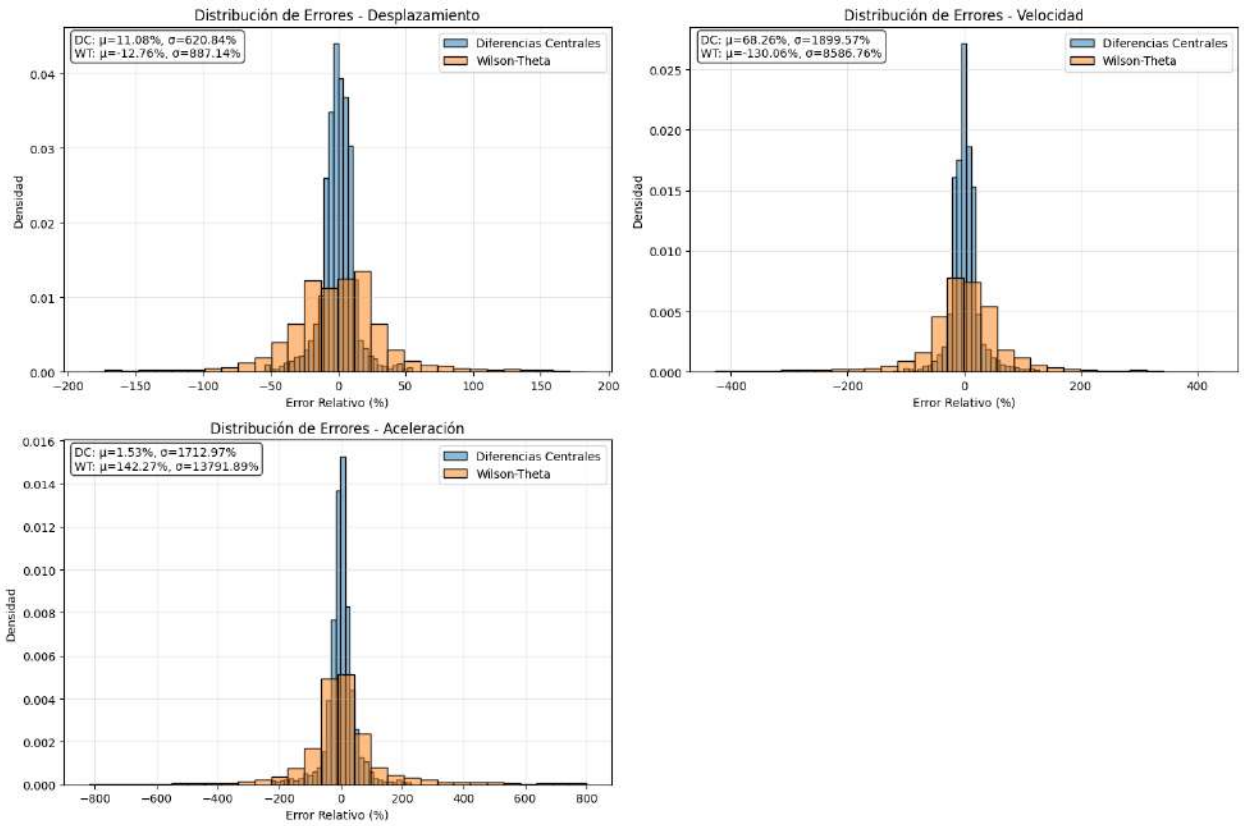
Figura 8. Dispersión de los Errores RMS por Nivel.



Los diagramas de barras de la Figura 8 evidencian la variabilidad de los errores RMS a lo largo del tiempo para cada nivel. Newmark-β y Wilson-θ presentan un comportamiento numérico más predecible con menores variaciones. El método de Diferencias Centrales muestra una dispersión amplia, lo que indica menor estabilidad numérica y predictibilidad en la respuesta.

Figura 9. Histogramas de la distribución de errores.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



Los histogramas de la Figura 9 confirman la concentración de errores bajos para los métodos implícitos. La distribución de errores para Diferencias Centrales es asimétrica y más dispersa, lo que refuerza su menor confiabilidad cuando se requieren predicciones precisas.

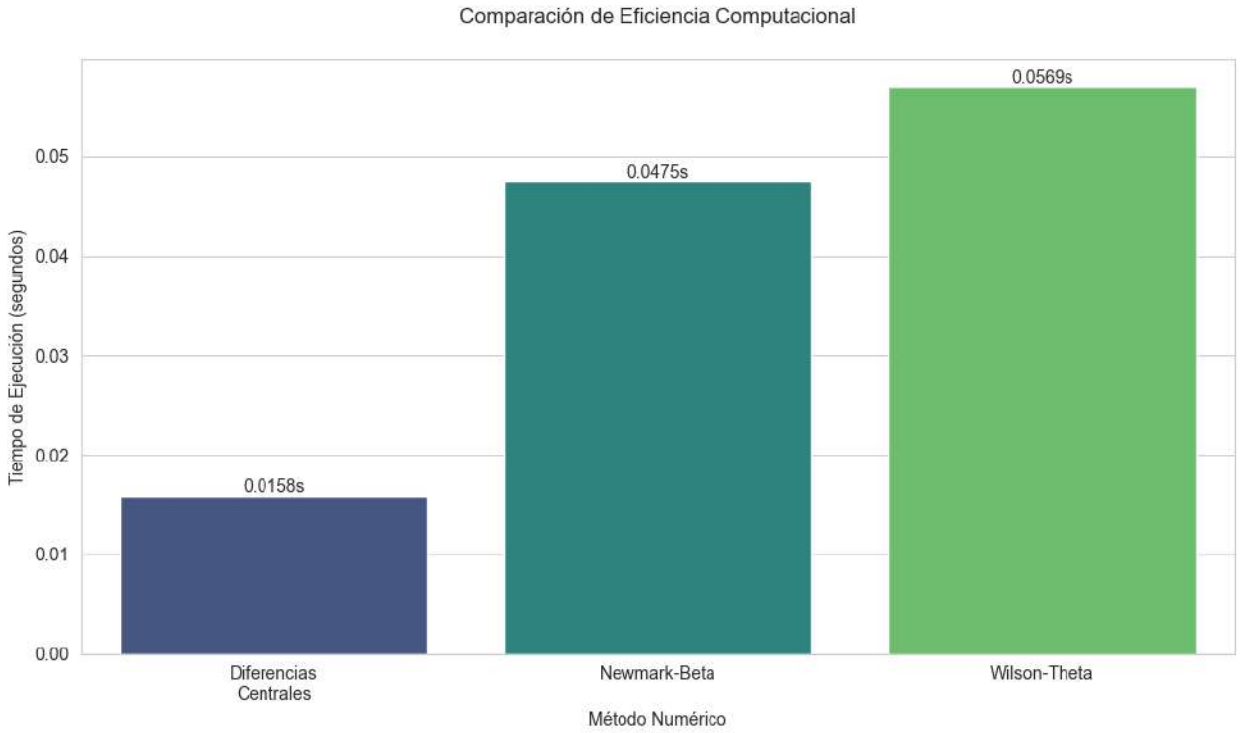
Eficiencia Computacional.

Tabla 2. Tiempos de ejecución promedio para 10 segundos de análisis (en ms).

Método	$\Delta t = 0.01$s	$\Delta t = 0.005$s	$\Delta t = 0.001$s
Diferencias Centrales	15.8 ms	45.7 ms	263.5 ms
Newmark	47.5 ms	95.2 ms	440 ms
Wilson	56.9 ms	112.5 ms	544 ms

Figura 10. Comparación de la Eficiencia Computacional a $\Delta t = 0.01$s.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional



La Figura 10 ilustra el tiempo de ejecución por método en función del paso de integración. Como se esperaba, el método explícito (Diferencias Centrales) es el más rápido por paso, ya que no requiere resolver sistemas de ecuaciones. No obstante, su necesidad de pasos temporales muy pequeños para mantener la estabilidad incrementa significativamente su tiempo total de ejecución.

Discusión

Este estudio muestra importantes variaciones en el comportamiento de los métodos de integración numérica al aplicarse a un pórtico irregular de cuatro niveles. En el análisis de estabilidad, el método de Diferencias Centrales demostró ser condicionalmente estable, fallando para pasos de tiempo mayores a 0.0018 s. Por otro lado, tanto Newmark-β como Wilson-θ mantuvieron la estabilidad incluso hasta Δt = 0.01 s, confirmando su naturaleza incondicionalmente estable. Se observó que Wilson-θ presenta la mayor robustez, con un factor θ = 1.4, que permite una mayor resistencia a aumentos en el paso temporal. Estos hallazgos corroboran que para análisis en los que es crucial la estabilidad numérica, especialmente en simulaciones de larga duración o con limitaciones computacionales, el método Wilson-θ se presenta como una opción segura, seguida por el método Newmark-β como una alternativa equilibrada.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

En términos de precisión, el método Newmark-β demostró ser el más preciso con errores relativos inferiores al 1% en desplazamiento y 1.1% en velocidad, lo que confirma su robustez para un análisis dinámico general. El método Wilson-θ mostró una precisión comparable, aunque con una ligera tendencia a sobre-amortiguar la respuesta, lo que lo hace adecuado para sistemas donde este efecto es beneficioso. Por otro lado, el método de Diferencias Centrales presentó mayores errores (superiores al 2.1% en velocidad), particularmente sensible a las altas frecuencias, lo que limita su uso a casos específicos con un paso de tiempo muy bajo.

Estos hallazgos respaldan la selección de Newmark-β como el método óptimo en la mayoría de análisis en dinámica estructural, mientras que Wilson-θ es útil si se necesita un control explícito del amortiguamiento numérico, y Diferencias Centrales queda restringido a análisis preliminares rápidos con modelos simples y pasos de tiempo muy reducidos. Esta restricción del método de Diferencias Centrales, debido a su necesidad de pasos de tiempo pequeños para garantizar estabilidad y precisión, ha sido documentada por Ro, Kim y Lee (2021) en el estudio de estructuras verticalmente irregulares para evaluación dinámica.

Es común que los métodos implícitos (Newmark-β y Wilson-θ) muestren una mayor estabilidad y, para el mismo paso de tiempo, una mayor precisión en la amplitud que el método explícito (Diferencias Centrales), especialmente si el paso de tiempo es grande para las frecuencias naturales más altas del sistema.

Los métodos implícitos, Newmark-β y Wilson-θ, son más eficientes en términos de tiempo de cómputo total cuando se permite utilizar pasos de tiempo mayores sin perder estabilidad. Por ejemplo, Newmark-β tardó 47.5 ms con Δt = 0.01 s, siendo más rápido que el propio método explícito para esta configuración de paso de tiempo. Wilson-θ resultó ser el más costoso computacionalmente, especialmente con Δt = 0.001 s (544 ms), debido a su formulación más compleja. Sin embargo, se mantuvo estable y utilizable en todos los casos evaluados.

Desde una perspectiva de eficiencia computacional, el método de Diferencias Centrales es notablemente más rápido por cada paso de tiempo, sin embargo, su tiempo de ejecución total se incrementa considerablemente al disminuir Δt. El comportamiento de los métodos Newmark-β y

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Wilson-θ es más estable en relación al paso de tiempo, con Newmark-β siendo aproximadamente un 30% más rápido que Wilson-θ en todos los intervalos estudiados (47.5 ms frente a 56.9 ms para $\Delta t = 0.01$ s). Estas determinaciones indican que, aunque Diferencias Centrales puede ser ideal para análisis preliminares rápidos con grandes Δt, Newmark-β es el que mejor combina precisión y eficiencia para análisis detallados. Wilson-θ, a pesar de ser un poco más lento, proporciona una robustez superior en problemas complejos, lo que puede justificar su mayor costo computacional en estos casos.

En resumen, la comparación numérica muestra que Newmark-β es el método más equilibrado para problemas estructurales lineales, especialmente cuando se desea mantener precisión y estabilidad sin incurrir en altos costos computacionales. La implementación de todos los métodos considerados puede realizarse con relativa facilidad en lenguajes de programación modernos (Python, MATLAB) utilizando bibliotecas algebraicas básicas. Las diferencias reales surgen no en la complejidad de codificación, sino en la gestión de estabilidad y precisión. Por lo tanto, Wilson-θ no es intrínsecamente más complejo de implementar que Newmark-β, ya que ambos son métodos lineales de integración directa y no requieren técnicas iterativas complejas en el régimen lineal.

Los resultados de la validación inicial del modelo mostraron una gran concordancia con el modelo de 1GDL de referencia (error <2%) y una alta exactitud en la determinación de los primeros modos de vibración (error <3%), corroborando la solidez y fiabilidad del modelo aplicado en este estudio.

Conclusiones

Este estudio presentó un análisis comparativo de tres métodos de integración numérica directa — Diferencias Centrales, Newmark-β y Wilson-θ— aplicados a un sistema estructural de cuatro grados de libertad con geometría irregular, sometido a una carga armónica. A partir de los resultados obtenidos, se establecen las siguientes conclusiones:

Conclusiones Clave

Los métodos implícitos (Newmark-β y Wilson-θ) demostraron una superioridad consistente en precisión numérica, estabilidad incondicional y robustez frente a la excitación de frecuencias altas. Newmark-β obtuvo los errores relativos más bajos ($< 1\%$) en desplazamiento y velocidad,

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

mientras que Wilson-θ mostró un rendimiento comparable, aunque con una leve tendencia a la sobre-amortiguación numérica. Estos resultados son coherentes con lo reportado por Blasi et al. (2024), quienes analizaron la respuesta sísmica de edificios irregulares de concreto armado y destacaron la eficacia de esquemas como el de Newmark-β frente a estructuras con irregularidades.

El método de Diferencias Centrales, a pesar de su simplicidad computacional por paso, evidenció una inestabilidad notable para pasos de integración mayores a 0.0018 s. Esta dependencia crítica del tamaño del paso de tiempo lo vuelve inapropiado para análisis dinámicos prolongados o sistemas con componentes rígidos, donde el límite de estabilidad es muy restrictivo.

Aunque el método explícito fue el más rápido por cada paso de integración individual, los métodos implícitos resultaron más eficientes globalmente en simulaciones de larga duración. Esto se debe a que permiten el uso de pasos de tiempo significativamente mayores sin comprometer la estabilidad ni la precisión. Newmark-β se posicionó como el mejor compromiso entre costo computacional y fidelidad en la respuesta estructural.

La inclusión de un pórtico con geometría asimétrica fue crucial para evidenciar las limitaciones y fortalezas de cada método en condiciones más realistas. Los métodos implícitos manejaron con mayor eficacia el acoplamiento modal y las respuestas amplificadas observadas en los niveles superiores de la estructura.

La implementación modular de los algoritmos en Python, con el uso eficiente de bibliotecas como NumPy para operaciones numéricas y Matplotlib para la visualización de resultados, resultó altamente efectiva. Esta aproximación no solo facilitó la simulación y validación de la respuesta dinámica del sistema, sino que también demostró la flexibilidad del entorno para su extensión a otros modelos estructurales.

Recomendaciones

Las siguientes recomendaciones se derivan de los resultados y la discusión de este estudio:

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Para la mayoría de los análisis estructurales lineales, el método Newmark-β (con β=0.25 y γ=0.5**)** es la opción óptima. Ofrece el mejor balance entre precisión, estabilidad y eficiencia computacional para diversas aplicaciones.

En sistemas con alta oscilación, o cuando se requiere un control específico del amortiguamiento numérico, el método Wilson-θ (con $\theta \geq 1.4$**)** resulta más conveniente. Su robustez adicional y estabilidad incondicional lo hacen particularmente útil en problemas que involucran altas frecuencias o una amplia gama de modos de vibración. Esta capacidad ha sido respaldada por estudios recientes, como el de Nica, Pavel y Hojda (2023), quienes, aunque enfocados en curvas de fragilidad, aplicaron técnicas de análisis dinámico no lineal donde métodos robustos como Wilson-θ demostraron ser efectivos en contextos con condiciones no lineales y múltiples frecuencias.

El método de Diferencias Centrales puede considerarse para análisis preliminares muy rápidos o sistemas con baja rigidez y duraciones de simulación cortas. Sin embargo, su aplicación está estrictamente condicionada a la observancia del límite de estabilidad y a escenarios donde la disipación numérica intrínseca no sea un factor crítico.

Se aconseja utilizar el método de Newmark-β con γ = 0.5 y β = 0.25, ya que estos parámetros se alinean con el esquema de aceleración promedio constante, proporcionando una precisión apropiada para la mayoría de las aplicaciones estructurales. Para el método de Wilson-θ, se recomienda un valor de $\theta \geq 1.4$, el cual asegura estabilidad incondicional y un comportamiento numérico robusto en las condiciones de análisis más habituales.

Futuros Estudios

Se recomienda que las investigaciones futuras exploren las siguientes áreas para extender el alcance de este trabajo:

Ampliar el modelo para incorporar efectos no lineales, tanto geométricos (grandes desplazamientos) como de material (comportamiento plástico, fluencia). Esto permitiría verificar

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

los procedimientos de integración en rangos post-elásticos, garantizando que capturen de manera apropiada el comportamiento estructural más allá del límite de fluencia.

Valorar el rendimiento de los métodos bajo cargas dinámicas más representativas, como registros de terremotos reales o excitaciones aleatorias, para comprobar la solidez del modelo bajo circunstancias sísmicas o ambientales complejas.

Para estructuras de gran escala, se sugiere la implementación de versiones paralelas (ej., usando CUDA o multiprocessing en Python) de los algoritmos. Esto mejoraría notablemente los tiempos de cálculo sin comprometer la exactitud de los resultados obtenidos, haciendo viables simulaciones de modelos más complejos.

Enriquecer la validación de las implementaciones propias mediante la utilización de códigos abiertos validados (como OpenSees) o softwares comerciales (SAP2000, ETABS). Este análisis sistemático posibilitará comprobar la fiabilidad y la exactitud relativa de los modelos numéricos y las implementaciones propias, mejorando el balance entre exactitud y eficacia computacional.

Limitaciones del Estudio

El presente estudio se limitó a un modelo lineal-elástico, por lo que no consideró las no linealidades geométricas ni de material. Esta restricción limita la aplicabilidad directa de los resultados a rangos de comportamiento post-elástico de las estructuras. Adicionalmente, se utilizó un amortiguamiento tipo Rayleigh, el cual podría no reflejar completamente el comportamiento disipador auténtico de la estructura en todas las condiciones. La excitación se restringió a una carga armónica determinista, excluyendo los efectos de cargas aleatorias o registros sísmicos reales, lo que disminuye la representatividad de la respuesta frente a condiciones dinámicas complejas. Estas limitaciones han sido destacadas por Bao et al. (2023), quienes resaltan la importancia de considerar la interacción suelo-estructura y asentamientos desiguales para obtener análisis más realistas y completos.

Finalmente, la implementación secuencial (no paralela) de los algoritmos limita su escalabilidad para modelos de gran envergadura o simulaciones de muy larga duración. Estas simplificaciones

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

deben tenerse en cuenta al aplicar los resultados a situaciones prácticas de diseño o análisis estructural.

Referencias

Aguiar, R. (2014). *Análisis Matricial de Estructuras con CEINCI-LAB*. Universidad de las Fuerzas Armadas, Instituto Panamericano de Geografía e Historia IPGH.

Bao, C., Shang, H., Ma, X., Wang, H., Cao, J., Wang, W., Zhang, Y., & Lim, L. (2022). *Seismic Response Analysis of Frame Structures with Uneven Settlement of Foundation Considering Soil-Structure Interaction*. SSRN Electronic Journal. https://doi.org/10.2139/ssrn.4256950

Blasi, G., Scarlino, A. S., Chirivì, S., Perrone, D., & Aiello, M. A. (2024). Seismic response of irregular RC buildings designed for gravity and seismic loads. *Bulletin of Earthquake Engineering*, *22*(10), 5231–5257. https://doi.org/10.1002/eqe.3653

Bohórquez Poveda, J. A. (2016). Análisis de un método compuesto de integración implícita del tiempo aplicado a problemas lineales de la dinámica estructural [Tesis de bachiller inédita]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Chang, S. Y. (2009). Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method. *Journal of Mechanics*, *25*(3), 289-297.

Chopra, A. K. (2020). Dynamics of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. 5th Edition, SI Units. Pearson Education Limited.

Dewey, A., Gomez, K., & Yee, M. (2023). PYTHON MANUAL: A LEARNING GUIDE FOR STRUCTURAL ENGINEERING STUDENTS.

Ghiassi, B., & Milani, G. (Eds.). (2019). Numerical modeling of masonry and historical structures: from theory to application. Woodhead Publishing.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Hernández González, R. (2020). *Métodos numéricos para respuesta dinámica de sistemas de 1 GDL* [Tesis doctoral, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].

Huancapaza Zea, F. (2021). *Análisis comparativo de métodos numéricos para obtener la respuesta dinámica de estructuras, Tacna 2021* [Tesis de bachiller inedita]. Universidad Privada de Tacna. Repositorio institucional de la Universidad Privada de Tacna. http://161.132.207.135/handle/20.500.12969/2103

Krishnan, P. A., & Thasleen, N. (2020, June). *Seismic analysis of plan irregular RC building frames*. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 491, No. 1, p. 012021). IOP Publishing.

Lima, A. V. (2024). Avaliação numérica de alvenaria estrutural devido a cargas dinâmicas. [Tesis de Maestría, Universidade Federal Do Ceará]

Magisano, D., Corrado, A., Madeo, A., & Garcea, G. (2022). A reduced order model for nonlinear time history seismic analyzes of elasto-plastic 3D frame structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, *51*(9), 2055–2076. https://doi.org/10.1002/eqe.3653

Navarro Crespo, I. (2020). Análisis de métodos de integración numérica para problemas dinámicos. Implementación y validación mediante una aplicación de MATLAB [Tesis de maestría, Universitat Politècnica de València]. RiuNet. http://hdl.handle.net/10251/157935

Nica, G., Pavel, F., & Hojda, G. (2023). A fast nonlinear dynamic analysis automated approach to produce fragility curves for 3D RC frames. *Engineering Structures*, *281*, 115695. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115695

Nina Huisa, R. A. (2016). Análisis comparativo de los métodos numéricos de integración directa para evaluar la respuesta de estructuras de varios grados de libertad sometidas a cargas dinámicas [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco]. RENATI. http://hdl.handle.net/20.500.12918/2482

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Ro, K. M., Kim, M. S., & Lee, Y. H. (2021). A simplified approach to modeling vertically irregular structures for dynamic assessment. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, *21*(6), 2320–2329. https://doi.org/10.1080/13467581.2021.1971682

Vasiljević, R. R. (2023). Numerical methods and their application in dynamics of structures. *Vojnotehnički glasnik/Military Technical Courier*, *71*(2), 452–472.

Vásconez, E., Aguiar, R., & Aref, A. (2016). Análisis de respuesta elástica en el tiempo aplicando el Método de Newmark y el Método de Wilson. *Revista Ciencia*, *18*(2), 281–304.

Vu, D. K., & Tuan, N. D. (2010). *Stability analysis of direct integration algorithms applied to MDOF nonlinear structural dynamics.* Journal of Engineering Mechanics, 136(6), 727–735. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000083

Zhu, M., McKenna, F., & Scott, M. H. (2018). OpenSeesPy: Python library for the OpenSees finite element framework. *SoftwareX*, *7*, 6-11.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Apéndice A: Código de Implementación en Python

Este apéndice contiene un fragmento clave del código Python desarrollado para la simulación dinámica estructural. Se presenta la función de implementación del método de Diferencias Centrales, junto con una utilidad para la verificación de la estabilidad numérica del sistema. El código completo del proyecto, incluyendo los módulos para los métodos de Newmark-β y Wilson-θ, así como las rutinas de análisis comparativo y generación de gráficos, está disponible en el repositorio de GitHub de este proyecto: [*Coloca aquí el URL de tu repositorio GitHub si tienes uno*].

Archivo: analisis_comparativo.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def check_stability(M, K, dt):
    """
    Verifica la estabilidad numérica del sistema para el método de diferencias centrales.
    Calcula el paso de tiempo crítico basado en la frecuencia natural máxima.
    """
    try:
        # Calcular frecuencias naturales del sistema
        # np.linalg.eigvals retorna los valores propios (lambda).
        # Los cuadrados de las frecuencias naturales son los valores propios de (inv(M) @ K)
        eigvals = np.linalg.eigvals(np.linalg.inv(M) @ K)
        # La frecuencia natural máxima es la raíz cuadrada del valor propio máximo (en magnitud)
        max_freq = np.sqrt(np.max(np.abs(eigvals)))

        # Período más pequeño del sistema (T_min = 2 * pi / omega_max)
        min_period = 2 * np.pi / max_freq

        # Para estabilidad de Diferencias Centrales, dt debe ser menor o igual que T_min / pi
        critical_dt = min_period / np.pi

        print("\nAnálisis de estabilidad numérica:")
        print(f"Frecuencia natural máxima: {max_freq:.2f} rad/s")
        print(f"Período natural mínimo: {min_period:.6f} s")
        print(f"Paso de tiempo crítico (para Diferencias Centrales): {critical_dt:.6f} s")
        print(f"Paso de tiempo actual (dt): {dt:.6f} s")

        if dt > critical_dt:
            print("\n¡ADVERTENCIA! El paso de tiempo actual es mayor que el crítico.")
            print("Esto puede causar inestabilidad numérica en el método de Diferencias Centrales.")
            print(f"Se recomienda usar dt <= {critical_dt:.6f}")
            return False
        else:
            print("\nEl paso de tiempo es adecuado para la estabilidad numérica (Diferencias Centrales).")
            return True
```

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

```
    except np.linalg.LinAlgError:
        print("\n¡ADVERTENCIA! No se pudo realizar el análisis de estabilidad (problema de álgebra lineal
).")
        return False

# --- Implementación del Método de Diferencias Centrales ---
def central_difference_method(M, C, K, P0, omega, dt, total_time, x0, xdot0):
    """
    Implementa el método de Diferencias Centrales para resolver la ecuación
    de movimiento dinámico de un sistema de MGDL.
    """
    num_dof = M.shape[0]
    num_steps = int(total_time / dt) + 1
    time_points = np.linspace(0, total_time, num_steps)

    displacements = np.zeros((num_steps, num_dof))
    velocities = np.zeros((num_steps, num_dof))
    accelerations = np.zeros((num_steps, num_dof))

    # Condiciones iniciales
    displacements[0, :] = x0
    velocities[0, :] = xdot0

    # Calcular aceleración inicial (a_0)
    F0 = P0 * np.sin(omega * 0)  # Carga en t=0
    accelerations[0, :] = np.linalg.solve(M, F0 - np.dot(C, xdot0) - np.dot(K, x0))

    # Calcular desplazamiento en t = -dt (x_-1) para iniciar la recursión
    # x_-1 = x_0 - dt*xdot_0 + (dt^2 / 2) * xddot_0
    x_minus_dt = x0 - dt * xdot0 + (dt**2 / 2) * accelerations[0, :]

    # Constantes efectivas para la ecuación de diferencias centrales
    # (1/dt^2)M + (1/(2*dt))C
    M_eff = M / (dt**2) + C / (2 * dt)

    # K_barra = (1/dt^2)M + (1/(2*dt))C + K
    # No, es la matriz de "rigidez" efectiva [1/(dt^2)M + 1/(2*dt)C + K]x_{i+1} = P_{i+1} + F_historia
    # Esto es más bien el término A en la ecuación de la forma A*x_{i+1} = B*x_i + C*x_{i-1} + D*F_i

    # Se reorganiza la ecuación de diferencias centrales:
    # M x_ddot + C x_dot + K x = F
    # x_ddot_i = (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) / dt^2
    # x_dot_i = (x_{i+1} - x_{i-1}) / (2*dt)
    #
    # M(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) / dt^2 + C(x_{i+1} - x_{i-1}) / (2*dt) + K x_i = F_i
    #
    # [M/dt^2 + C/(2*dt)] x_{i+1} = F_i - K x_i + [2M/dt^2] x_i - [M/dt^2 - C/(2*dt)] x_{i-1}
    #
    # [M/dt^2 + C/(2*dt)] x_{i+1} = F_i + [2M/dt^2 - K] x_i + [-M/dt^2 + C/(2*dt)] x_{i-1}
```

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

```
# Coeficientes para la recursión
A = M / (dt**2) + C / (2 * dt)
B = 2 * M / (dt**2) - K
D = -M / (dt**2) + C / (2 * dt)

for i in range(num_steps - 1):
    t_i = time_points[i]
    x_t = displacements[i, :]

    # x_t_minus_dt_curr es x_{i-1}. Para i=0, es x_{-1}
    x_t_minus_dt_curr = x_minus_dt if i == 0 else displacements[i-1, :]

    F_t = P0 * np.sin(omega * t_i)

    # Término del lado derecho de la ecuación efectiva
    rhs = F_t + np.dot(B, x_t) + np.dot(D, x_t_minus_dt_curr)

    # Resolver para x_{i+1}
    displacements[i+1, :] = np.linalg.solve(A, rhs)

    # Calcular velocidades y aceleraciones usando diferencias centradas
    # (se calculan para el paso 'i' una vez que x_{i+1} está disponible)
    if i == 0:
        # Para el primer paso, usamos x_minus_dt para la velocidad y aceleración en t=0
        velocities[i, :] = (displacements[i+1, :] - x_minus_dt) / (2 * dt)
        accelerations[i, :] = (displacements[i+1, :] - 2 * x_t + x_minus_dt) / (dt**2)
    else:
        velocities[i, :] = (displacements[i+1, :] - displacements[i-1, :]) / (2 * dt)
        accelerations[i, :] = (displacements[i+1, :] - 2 * x_t + displacements[i-1, :]) / (dt**2)

# Calcular últimos valores (en el último paso de tiempo total_time)
# Usar diferencias hacia atrás de segundo orden si no hay más puntos futuros
# Para el último punto (num_steps - 1), no tenemos x_{i+1}
# xdot[-1] = (3x_N - 4x_{N-1} + x_{N-2}) / (2dt)
# xddot[-1] = (x_N - 2x_{N-1} + x_{N-2}) / dt^2
velocities[-1, :] = (3 * displacements[-1, :] - 4 * displacements[-2, :] + displacements[-3, :]) / (2 * dt)
accelerations[-1, :] = (displacements[-1, :] - 2 * displacements[-2, :] + displacements[-3, :]) / (dt**2)

return time_points, displacements, velocities, accelerations
```

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Agradecimiento:

N/A

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional