ASCE MAGAZINE ISSN: 3073-1178

Revista ASCE Magazine, Periodicidad: Trimestral Julio - Septiembre, Volumen: 4, Número: 3, Año: 2025 páginas 1162-1180

Doi: https://doi.org/10.70577/ASCE/1162.1180/2025

Recibido: 2025-05-30
Aceptado:2025-06-30
Publicado:2025-07-31

Estudio de series de Fourier y algunas aplicaciones

Study of Fourier series and some applications

Autores:

Marco Vinicio Parra Chávez
https://orcid.org/0009-0000-1252-0108
marco.parra6591@utc.edu.ec
Universidad Técnica de Cotopaxi
Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas,
Latacunga - Ecuador

Ana Carola Flores Mancheno
https://orcid.org/0000-0003-0780-5226
acmancheno@espoch.edu.ec
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Facultad de Recursos Naturales.
Riobamba - Ecuador

Cómo citar

Parra Chávez, M. V., & Flores Mancheno, A. C. (2025). Estudio de series de Fourier y algunas aplicaciones. *ASCE*, *4*(3), 1162–1180.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Resumen

Las series de Fourier no están incluidas en el plan de estudios de pregrado de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). El objetivo de esta investigación documental es proporcionar un documento referencial integral para estudiantes de la ESPOCH interesados en el estudio de las series de Fourier. La metodología se basa en cualitativo no-interactivo con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Como resultado, se elaboró un documento referencial que brinda una base sólida para el estudio de las series de Fourier, conceptos, teoremas, proposiciones, lemas y propiedades; de igual manera, ejemplos de problemas didácticos de aplicaciones en situaciones reales, que pueden beneficiar la formación académica de los alumnos de la carrera de matemática y, así como, lo suficientemente flexible para ser adaptado por carreras de ingenierías. Precisamente, este documento se organiza en tres módulos como una estrategia efectiva para abordar el estudio de las series de Fourier. El primero se enfoca en conceptos preliminares para proporcionar una base sólida; mientras que, el segundo se enfatiza en el desarrollo teórico y, finalmente, el tercero enfocado a presentar algunas aplicaciones, evidenciando la relevancia práctica en diferentes campos. En conclusión, el documento referencial muestra un aporte sustancial que sirve para la carrera de Matemática como para aquellas que analizan el estudio de Series de Fourier en la ESPOCH, primordialmente para los alumnos que quieran vincularse al aprendizaje de las series de Fourier, con hincapié en aprendices con miras a elaborar investigaciones de profundización, estudios de cuarto nivel y actividad docente enfocado al estudio de Series de Fourier.

Palabras claves: Series de Fourier, Convergencia, Funciones Periódicas, Aplicaciones

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Abstract

Fourier series are not included in the undergraduate mathematics curriculum at the Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). The objective of this documentary research is to provide a comprehensive reference document for ESPOCH students interested in the study of Fourier series. The methodology is based on non-interactive qualitative research with a descriptive scope and a documentary research design. As a result, a reference document was developed that provides a solid foundation for the study of Fourier series, concepts, theorems, propositions, lemmas, and properties; likewise, examples of didactic problems with applications in real situations, which can benefit the academic training of mathematics students and are flexible enough to be adapted by engineering programs. Precisely, this document is organized into three modules as an effective strategy to approach the study of Fourier series.

The first module focuses on preliminary concepts to provide a solid foundation; the second emphasizes theoretical development, and finally, the third is dedicated to presenting some applications, highlighting the practical relevance in different fields. In conclusion, the reference document provides a substantial contribution that serves both the Mathematics program and those analyzing the study of Fourier Series at ESPOCH, primarily for students who wish to engage in the learning of Fourier Series, with an emphasis on learners aiming to conduct in-depth research, pursue advanced studies, and engage in teaching activities focused on the study of Fourier Series.

Keywords: Fourier Series, Convergence, Periodic Functions, Applications

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Introducción

Estas series adquirieron el nombre de su investigador el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830), quien las incorporo cuando estudiaba la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ donde } \alpha \; es \text{ una constate que está vinculada al conjunto de los } \mathbb{R}.$$

Lo cual fue usada para proporcionar respuestas a dicha ecuación; sin embargo, ahora las series de Fourier son la representación matemática de una serie infinita que se une primordialmente a una función periódica y continua,

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(w_0\, kt\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sen(\, w_0 kt), \qquad a_0, a_k, w_o, b_k, t \in \mathbb{R}$$

Es decir, las series de Fourier se vuelven en una herramienta matemática primordial para el análisis de funciones periódicas a través de la descomposición en sumas infinitas de funciones trigonométricas (en palabras de seno y coseno).

Desde su hallazgo, las series de Fourier han sido un tema de gran interés tanto dentro del campo de la matemática como en otros dominios académicos, puesto que tienen muchas áreas de aplicación, como por ejemplo en las telecomunicaciones (Retamozo , 2021) permite trasformar una señal de dominio del tiempo y espacio con el fin de obtener información notoria. Así mismo en la óptica (Alagöz & Baykant , 2021) en ingeniería, como los dispositivos eléctricos y electrónicos (Matlam, Shende, & Lanjewar, 2023) procesamiento de señales (Zandieh, 2020) y finalmente en la elasticidad (Awasthi & Kaushik, 2022).

En este contexto, un ejemplo claro de cómo se aplican las series de Fourier en situaciones reales es el formato MP3 (MPEG Audio Layer III, un término en inglés que alude al grupo de expertos en imágenes en movimiento, denominado así por los estándares ISO para audio y video), que comúnmente se relaciona con la música. Sin embargo, detrás de este formato, se encuentra el procesamiento de señales de audio, en el cual se toma un sonido y se le asocia una serie de Fourier, que probablemente es infinita. Esta serie converge de tal manera que utilizar simplemente los primeros términos resulta suficiente para reproducir el sonido original; es posible ignorar el resto

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

de los términos, ya que no son perceptibles para el oído humano. Por esta razón, se almacenan únicamente los términos iniciales para la reproducción del sonido, lo que permite optimizar el espacio en el dispositivo de almacenamiento.

Con lo previamente mencionado, se hace evidente que hay una variedad de usos tanto fascinantes como significativos de las series de Fourier en diversas disciplinas, aportando de manera importante a las sociedades contemporáneas. Es precisamente esta importancia de sus aplicaciones lo que a menudo lleva a que sea reconocida y valorada en otras áreas del saber, como en diversas ingenierías, por ejemplo; mientras que los programas de matemáticas a nivel de pregrado tienden a enfocarse, en el mejor de los casos, solo en los conceptos teóricos, dejando de lado la aplicación práctica para las siguiente etapas académicas como un máster o un doctorado, donde realmente se puede abordar formalmente el tema de las series de Fourier y las variadas herramientas que este conocimiento puede proporcionar para solucionar problemas prácticos.

Planteamiento del problema

De acuerdo con el plan de estudio de lagunas Instituciones de Educación Superior (IES) en el Ecuador, es habitual que el análisis de las series de Fourier se enfoque primordialmente en facultades de Ingenierías, sin embargo, no se incluyen en las carreras de matemática. Este caso, particularmente, se puede observar en la malla curricular de la carrera de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), la cual se no se manifiesta el estudio de las series de Fourier vinculado al programa de formación de pregrado. Por esta situación, que su enseñanza se atrase para los programas de grado.

Objetivo general: Estudiar en detalle el tema de series de Fourier, a través de una revisión documental, para crear un documento referencial primordialmente para los alumnos de la ESPOCH que deseen formar parte en su estudio.

Objetivos específicos • Seleccionar ejemplos representativos que se enfoquen en la aplicación de series de Fourier en situaciones prácticas, reconociendo los campos del conocimiento donde las series de Fourier son importantes, para examinar a fondo cómo estas herramientas dan solución problemas específicos. • Elaborar un documento referencial que combine claridad y coherencia al presentar el riguroso tema de series de Fourier, empelando un lenguaje sencillo, ejemplos y gráficos, para mejorar la comprensión cómo estas series influyen en diferentes áreas del conocimiento, conectando la teoría en casos concretos de aplicación en la realidad.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Justificación

Considerando la relevancia de las series de Fourier, especialmente por su amplio uso en situaciones prácticas, el poder comenzar su estudio desde la etapa de pregrado ofrece numerosas oportunidades. Esto representa, sobre todo, un valioso complemento a la educación académica de quien aspira a ser matemático, además de la capacidad de obtener conocimientos fundamentales sobre el tema que facilitará la integración en un programa de posgrado o expandirá las opciones de enseñanza e investigación en áreas de ingeniería.

El documento de referencia resultante de esta investigación será una contribución significativa a la carrera de matemáticas de la ESPOCH, especialmente para aquellos alumnos que deseen adentrarse en el estudio de las series de Fourier y ciertas aplicaciones, enfocándose especialmente en aquellos aprendices con el objetivo de llevar a cabo estudios de cuarto nivel y actividad docente en campos como las ingenierías, por ejemplo.

Bajo estas premisas, el documento referencial también aportará significativamente a la comunidad académica de ingeniería, en particular a las disciplinas de mecánica, electricidad, electrónica y telecomunicaciones de la ESPOCH.

Metodología

Explicación de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación utilizados

En este apartado se evidenciarán los mecanismos usados para lograr la finalidad de este trabajo, como el enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación utilizadas para la elaboración de la presente investigación.

En primer lugar, el presente estudio tuvo un enfoque metodológico cualitativo no-interactivo con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Según Cresswell, (2013) La investigación cualitativa no interactiva se refiere a un enfoque que se dedica a estudiar fuentes de información como textos, grabaciones audiovisuales o archivos del pasado, entre otras. Así, en este enfoque, la recolección de información se realizó mediante la revisión y análisis de documentos y datos preexistentes, sin que el investigador participara activamente en la recogida de la información. Por consiguiente, este tipo de estudio se justifica en el Trabajo de Integración Curricular vinculado al análisis de las Series de Fourier y sus aplicaciones, dado que se recolectaron

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

datos de fuentes bibliográficas, que incluyen libros de carácter clásico y contemporáneo, que proporcionaron base para alcanzar un entendimiento completo de los conceptos teóricos y usos relacionados con las series de Fourier. Además, se tomó en cuenta su evolución a través del tiempo en la literatura académica.

Por otro lado, Ramos (2020) refiere al alcance descriptivo consiste en conocer las características del fenómeno y lo que se indaga. Es decir, su presencia en grupo de individuos determinados. Por cual, resultó apropiado el uso del alcance descriptivo en el Trabajo de Integración Curricular acerca del estudio de Series de Fourier y algunas Aplicaciones, debido que permitió la detallar de cómo, funciones con discontinuidades en sus derivadas pueden ser representadas en la suma de funciones suaves como los senos y cosenos. Por lo tanto, este tipo de descripción tuvo importancia para interpretar sus propiedades y aplicaciones en varios campos del conocimiento. De igual manera este diseño de investigación se utiliza cuando los objetivos de investigación necesiten el estudio de información ya que se tiene fuentes documentales, entre ellos están libros, artículos, informes, sin implicar la recopilación de información a través de instrumentos como cuestionarios o entrevistas.

De este modo, la implementación de un diseño de investigación basada en documentos en el Trabajo de Integración Curricular sobre el tema de Series de Fourier y sus aplicaciones se presentó como la opción más adecuada para su desarrollo, dado que involucró la búsqueda, elección, evaluación y examen de información pertinente que facilitó la elaboración de un documento de referencia que abarcó el estudio exhaustivo del asunto a considerar, dirigido a los alumnos de las facultades de ingeniería y matemáticas de la ESPOCH. En segundo lugar, para lograr el objetivo establecido en la investigación, se planteó realizar las siguientes fases empleando la técnica de análisis documental.:

En segundo lugar: La creación y redacción del texto base respecto al estudio de las series de Fourier y sus diversas aplicaciones, dirigido especialmente a los alumnos de la ESPOCH, en particular a aquellos en las carreras de ingeniería y matemáticas. En términos más simples, los métodos de análisis de datos documentales reunieron y analizaron la información pertinente que ya se encuentra en documentos existentes en el proceso investigativo, ya sea en formato físico o digital, aprovechando los datos extraídos de la información recopilada. Finalmente, tercero, pero no menos importante, con respecto a los instrumentos de investigación utilizados se pueden mencionar:

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional
https://magazineasce.com/

La computadora, debido que en la actualidad se ha transformado en un recurso extremadamente valioso, especialmente en el ámbito de la investigación, dado que facilita la ejecución de numerosas actividades, como la revisión de fuentes, la recopilación de datos y la exposición de hallazgos; permitiendo así al investigador obtener información de forma más efectiva y exacta en comparación con las técnicas convencionales. Además, facilitó una mejora en la colaboración y el diálogo entre los integrantes del equipo de investigación, así como la capacidad de intercambiar información y hallazgos a través de internet.

La red, debido que en la actualidad la web proporciona buscadores de información académica como Google Scholar, Redalyc y otros; que hicieron más sencillo el proceso de buscar y reunir datos para las investigaciones científicas. Esto posibilitó una rápida selección y decisión sobre información relacionada con la temática de las series de Fourier y sus diversas aplicaciones, además de contar con un acceso amplio a la bibliografía existente sobre el asunto.

LATEX es un programa de edición de textos que ofrece recursos que simplifican la redacción del Trabajo de Integración Curricular y Referencial. Debido que ofrece instrucciones para elaborar ecuaciones matemáticas, referencias bibliográficas facilitando la presentación de un documento que se ajuste a la escritura matemática.

Resultados

MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se exponen los hallazgos logrados en la investigación acerca de las series de Fourier y sus diversas aplicaciones, utilizando las metodologías pertinentes como el análisis personal en la selección y decisión de materiales bibliográficos, que facilitaron el apoyo en la creación del Trabajo de Integración Curricular junto con el documento de referencia.

Módulo I

Objetivo del módulo

Presentar y explicar de manera clara los conceptos básicos necesarios antes del análisis de las series de Fourier que se aplicarán en el resto del texto, lo que facilitará la comprensión del vocabulario, términos y nociones que se abordarán en las secciones siguientes. Con el fin de cumplir con este objetivo, se tratarán los conceptos de forma pedagógica, ofreciendo explicaciones precisas y sin

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

ambigüedades, apoyándose en ejemplos que facilitarán la comprensión y contextualización de cada idea; así, esta sección del documento, titulada Preliminares, contribuirá a la comprensión integral de los dos módulos posteriores, maximizando su contenido.

Jean Baptiste Joseph Fourier

Destacado matemático, de orígenes muy humildes que se enfoco en una actividad en diferentes áreas, como su obra matemática en el año de 1822, titulada Théorie Analytique de la Chaleur. Además, fue el primer matemático en estudiar el efecto invernadero.

Conceptos básicos

Las categorías de números, tales como los naturales, los enteros, los racionales y los irracionales, que al unirse forman el conjunto de los números reales, son elementos clave en el ámbito matemático. Por lo tanto, han sido objeto de estudio y exploración a lo largo de la historia.

Notación de conjuntos:

- **Los Números naturales**

Es el conjunto de números naturales identificado como $\mathbb{N}$, que esta constituida por todos los números positivos sin parte decimal y el cero. Generalmente el conjunto de números enteros se manifiesta como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

y

$$\mathbb{N}* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- **Números enteros**

El conjunto $\mathbb{Z}$, es aquella que contine todos los números naturales (positivos) al igual que los negativos y el cero. Estos números se representan de la siguiente manera

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Se emplean para indicar valores negativos, variaciones en cantidades, así como en la resolución de situaciones que implican adiciones o sustracciones de números

- **Números reales**

El grupo de números reales, indicado como $\mathbb{R}$, incluye todos aquellos números que se pueden expresar ya sea mediante una expansión decimal finita o infinita. Esto implica que incluye todos los números tanto racionales como irracionales. Así, podemos afirmar que el conjunto de números reales R es la combinación de los números racionales y los irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Por lo tanto, los números reales ($\mathbb{R}$) se caracterizan como el conjunto que abarca o integra los números naturales ($\mathbb{N}$), los enteros ($\mathbb{Z}$), los racionales ($\mathbb{Q}$) y los irracionales ($\mathbb{I}$).

Notación de derivadas parciales

Las derivadas parciales son nociones clave en el cálculo multivariable que posibilitan evaluar el cambio de una función que depende de múltiples variables en relación a cada una de sus variables independientes de manera aislada.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D_1 = \partial_x f = f_x$$

La notación clásica empleando subíndices $\frac{\partial f}{\partial x}$, es la que más se utiliza por su claridad, siendo adecuada para realizar cálculos sencillos y para analizar funciones con una sola variable.

Ortogonalidad

En esta sección, se analizará cómo los dos conceptos vectoriales del producto interno, conocido también como producto escalar, y la ortogonalidad entre vectores pueden ser aplicados a funciones.

Funciones periódicas

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función periódica se puede describir como una función

Es decir, se representa de la siguiente manera.

$f(t) = f(t + T)$, para todo $t \in$ R (1.3)

La constante mínima T que vincula la relación (1.3) con el nombre de período de la función.

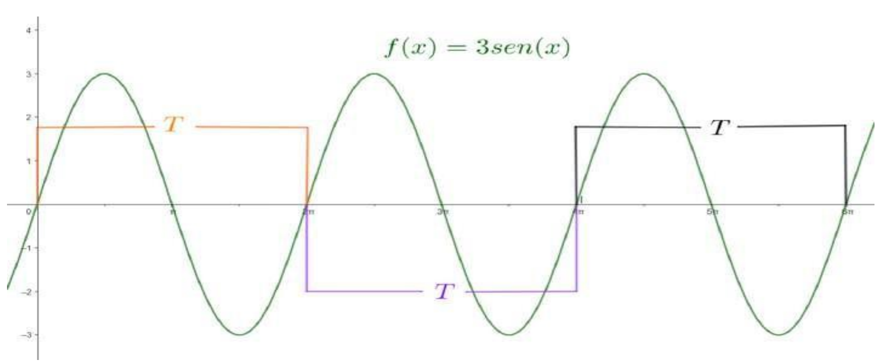
Ejemplo

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3\ sen(x)$. Graficar la función f e indicar su período

Solución

En la Figura 1 se evidencia la gráfica de la función periódica $f(x) = 3\ sen(x)$. Se muestra que el período de la función $f\ es\ T = 2\pi$

Figura 1._Gráfica de la función periódica f(x) = 3 sen(x)_



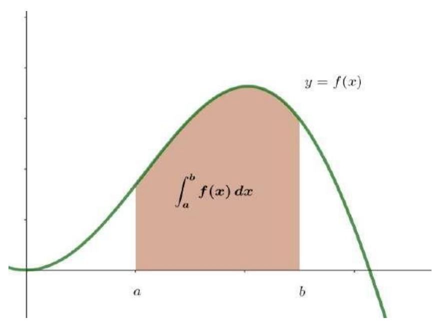
Fuente: Elaboración propia

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Riemann integrable

Una función f acotada y definida en un intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ se considera que es Riemann integrable en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ si hay un número I en los reales de modo que, para cada número real positivo ϵ hay una δ positiva tal que si P represent una participación de $[a, b]$ con $\| P \| < \delta$ y$S(P, f)$ es cualquier suma de Riemann entonces $|S(P, f) - I| < \epsilon$

Figura 2.*Área bajo la curva*



Fuente: Elaboración propia

Funciones continuas por intervalos

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua por intervalos en un trayecto sí.

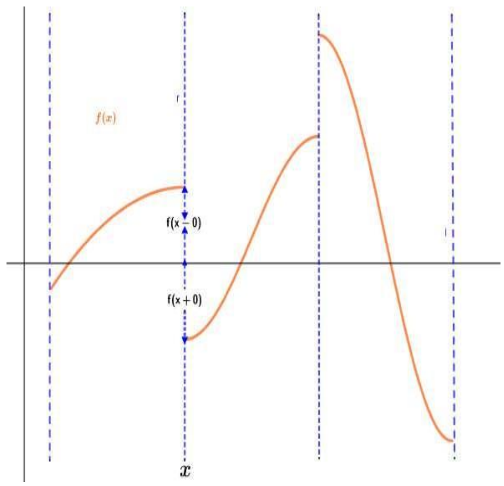
a) Esto puede dividirse en una cantidad de sub-intervalos en los que $f(x)$ es continua en cada uno.

b) Es decir, cuando los límites de a da $f(x)$ se aproxima a los extremos de cada subintervalo son finitos

Una manera diferente de describirla es decir que una función continua por tramos es aquella que presenta un número limitado de discontinuidades limitadas. La figura 3 muestra un ejemplo de una función continua por tramos.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Figura 3. *Función continua por intervalos*



Fuente: Elaboración propia

Función par y función impar

Definición: Función par e impar

a) Se dice que f es una función par si, sea $f: Dom\ (f) \rightarrow \mathbb{R}$ para toda x en el dominio de $f, f(-x) = f(x)$

b) De dice que una función f es una función impar si, sea $f: Dom\ (f) \rightarrow \mathbb{R}$ para toda x en el dominio de $f, f(-x) = -f(x)$

c) En ambas partes a) y b) se entiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

Convergencia

El cálculo es importante para la idea de Newton de representar las funciones mediante sumas de series infinitas. Así, en una situación donde había que determinar áreas Newton se ocupaba a menudo de una función, la convertía primero en una serie y cada uno de los términos de dicha serie. Muchas de las funciones que aparecen en la física matemática y en la química matemática, como las funciones de Bessel, se definen como sumas de series, lo que hace esencial entender los fundamentos de la convergencia de secuencias y series infinitas.

Funciones seno y coseno

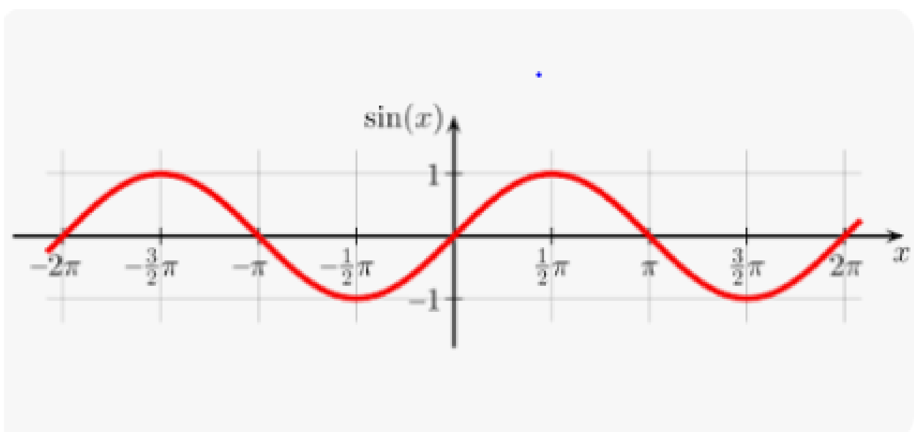
Función seno

1. Su ámbito abarca todos los números reales R y es continua
2. La trayectoria es $[-1, 1]$; $ya\ que\ -1 \leq sen(x) \leq 1$
3. Traza el eje X en los puntos $k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Traza al eje Y en el punto $(0, 0)$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

4. Resulta impar, es decir simétrica en relación al origen: $sen(-x) = -sen(x)$
5. Es necesariamente creciente en intervalos de la forma (a, b) donde $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ y\ b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
6. Se representa de manera decreciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ y\ b = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
7. Posee infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $\frac{\pi}{2}\ 2k\pi, 1$ para $k \in \mathbb{Z}$. T Posee infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, -1$ para $k \in \mathbb{Z}$
8. período es 2π
9. Está acotada de manera superior e inferior por $1\ y\ -1$

Figura 4. *Representación de función seno*



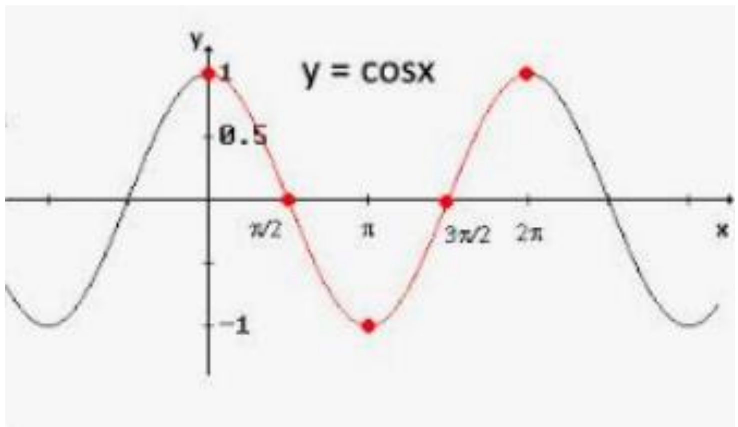
Función coseno

1. El dominio es $\mathbb{R}$ y continua
2. La trayectoria es $[-1, 1]$
3. Traza el eje X en los puntos $\frac{\pi}{2} + k\pi\ para\ k \epsilon \mathbb{Z}$. Corta el eje Y en el punto $(0,1)$
4. Es par, es decir, es simétrica respecto al eje $Y.\ cos(x) = cos(-x)$
5. Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = -\pi + 2k\pi\ y\ b = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$
6. Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma (a, b) donde $a = 2k\pi\ y\ b = \pi + 2k\pi\ para\ k \in \mathbb{Z}$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

7. Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma $(2k\pi, 1)\ con\ k\ \in \mathbb{Z}$. Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma $(\pi\ +\ 2k\pi, -1)\ para\ k\ \in \mathbb{Z}$)
8. Su período es 2π
9. Está acotada superiormente e inferiormente por $1\ y\ -1$ respectivamente.

Figura 5. *Función coseno*



Modulo II

Series de Fourier

Objetivo del módulo

Elaborar un análisis sobre las series de Fourier, centrado en sus principios básicos, mediante ejemplos que ayuden a clarificar y hacer más accesible su entendimiento. Esta sección del texto de referencia facilitará el conocimiento de la terminología asociada a las series de Fourier. Ofrecerá recursos teóricos cruciales para su uso en ejercicios pertinentes, favoreciendo el crecimiento académico y profesional.

Principios de la serie de Fourier

La preparación y comprensión de las series de Fourier, nos lleva una inmensa serie de maravillas en las matemáticas, en las aplicaciones directas que se pueden dar a estas. Desde su origen o hasta su introducción en la música o la ingeniería y la ciencia, estas series han sembrado su huella en los conocimientos y el avance tecnológico. De este modo, al examinar las series de Fourier, encontramos una melodía oculta que impacta todos los aspectos de la vida y nos inspira a continuar con la búsqueda y creación de saberes sin límites. Una serie de Fourier describe una función como una secuencia de constantes que se multiplican por funciones seno o coseno de diferentes frecuencias.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Serie de Fourier de una función

Sea $f\,:\,[-L,L] \subset \text{R} \rightarrow \text{R}$ Por el momento, suponga sólo que $\int_{-L}^{L} f(x)dx$ existe, se quiere explorar la posibilidad de elegir números que pertenece al conjunto de los números reales $R, a_{0,} a_{1,\ldots,} b_{1,} b_2, \ldots..$ tales que

$$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

Convergencia de la serie de Fourier

Poder expresar los coeficientes de Fourier de una función f en un intervalo $[-\text{L}, \text{L}]$ es una cuestión que solo requiere la existencia de las integrales definidas

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

y

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, sen\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

En esta sección se presenta una solución estilizada y atractiva a lo que resultó ser uno de los más. No obstante, establecer si la serie de Fourier obtenida se aproxima a $f(x)$, o si converge de alguna manera, es un asunto totalmente distinto. Las complicaciones de esta consulta se evidenciaron en 1873 cuando el matemático francés Paul Du Bois-Reymond (1831–1889) mostró un caso de una función continua en el rango $(-\pi, \pi)$, pero cuya serie de Fourier no convergía en ningún lugar dentro de este rango.

Las Condiciones de Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet (o condiciones de existencia) para la convergencia de la serie de Fourier de una función $f(x)$con $2L$período son las siguientes:

- La función $f(x)$d necesita estar bien definida y ofrecer un único valor en todo el rango $[-\text{L}, \text{L}]$, salvo en un número limitado de puntos. Esto implica que $f(x)$ no debe exhibir saltos ni tener discontinuidades que sean infinitas en ese intervalo, y no debe haber una cantidad infinita de puntos donde no esté definida o donde no proporcione un único valor.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

- Además, $f(x)$ tiene que ser periódica con un período de $2L$. Esto quiere decir que$f(x + 2L) = f(x)$)para cada valor x para cada valor de x que pertenezca al dominio de la función.
- Tanto la $f(x)$ como su derivada $f'(x)$ deben ser continuas por intervalos en el intervalo $[-\mathrm{L}, \mathrm{L}]$. Esto significa $f(x)$ no puede presentar saltos o discontinuidades infinitas y además $f'(x)$ debe ser continua en todos los puntos donde sea válida.

Si una función $f(x)$ cumple con estos criterios, lo cual se afirma la convergencia de la serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[-\mathrm{L}, \mathrm{L}]$. La serie de Fourier presenta a $f(x)$ como una unión de funciones seno, coseno y converge a $f(x)$ en los puntos donde $f(x)$ es continua. En los puntos donde $f(x)$ tiene discontinuidades finitas, la serie de Fourier converge al valor promedio de los límites a ambos lados de la discontinuidad, se acerca al valor promedio del fenómeno de la de Gibbs.

Módulo III

Ciertas aplicaciones

Las series de Fourier, son utilizadas como una herramienta matemática de gran efectividad en diferentes áreas. Al desintegrar funciones periódicas en otras trigonométricas un ejemplo son senos y cosenos, permitiendo una comprensión de las señales y circunstancias complicadas.

Objetivo

El empleo de las series de Fourier simplifica la elaboración de circuitos electrónicos, la producción de tonos musicales y principalmente, la solución de ecuaciones en física.

Electrocardiografía

Se descubrió hace mucho tiempo que el corazón produce una corriente eléctrica y que se puede graficar el voltaje generado por esta corriente. Este fenómeno se conoce como electrocardiograma.

La ecuación de calor; separación de variables

Ejemplo

Se calienta un tubo estrecho de aluminio (α 2 = 0,86cm2 s) que mide 10 cm de longitud a una temperatura constante de 100 grados Celsius. En el momento t = 0, los extremos de este tubo se sumergen en un baño de hielo a 0 grados Celsius, lo que hace que la temperatura se mantenga en ese nivel. No se permite que el calor se disipe a través de los lados del tubo. Encontrar una fórmula para la temperatura en cualquier parte del tubo y para todos los tiempos futuros t.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Interpretación

Se representa como $u(x,t)$ la temperatura en la barra en la ubicación x en el tiempo t. Esta función cumple con el problema de condiciones en la frontera.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = 0{,}86\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{cases} u(x,0) = 100 \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \end{cases} \quad 0 < x < 10$$

La solución es $u(x,t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n \ sen\left(\frac{nx\pi}{10}\right) e^{-0{,}862\pi\, 2\frac{t}{100}}$, donde

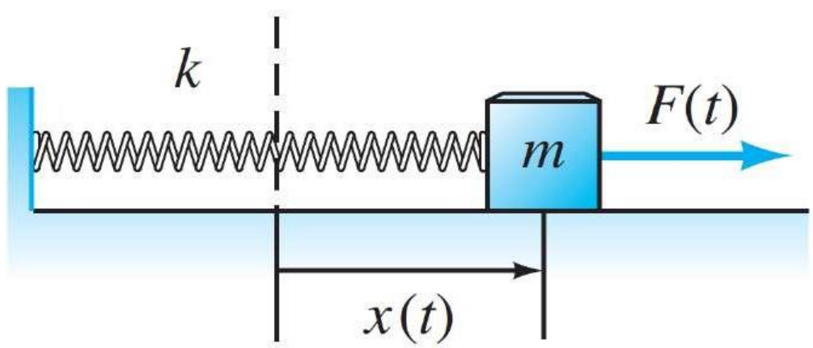
$$c_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} 100\, sen\left(\frac{nr\pi}{10}\right) dx = \frac{200}{n\pi}\,(1-\cos(n\pi))$$

$c_n = 0$ si n es par, y $c_n = \frac{400}{n\pi}$ sí n es impar. Es decir, se representa de la siguiente manera

$$u(x,t)\frac{400}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n+1)\frac{x\pi}{10}}{2n+1} e^{-o.86(2n+1)^2\pi^2\frac{t}{100}}$$

Movimiento no amortiguado

Figura 6. *Sistema masa-resorte con una fuerza externa*



Fuente: Elaboración propia

Primero, examine el movimiento sin fricción de una masa m en un resorte que tiene una constante de Hooke k, bajo la acción de una fuerza externa cíclica $F(t)$, tal como se muestra en la Figura 6. Su posición $x(t)$ respecto a su estado de reposo sigue la ecuación bien conocida.

$$mx'' + kx = F(t)$$

La representación general es

$$x(t) = c_1 \cos(w0t) + c_2\, sen(w0t) + xp(t),$$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

donde $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema, y $xp(t)$ es una respuesta particular de la ecuación

Los valores $c_1\ y\ c_2$ se determinan en función de las condiciones iniciales. Se desea utilizar la serie de Fourier para encontrar una solución periódica particular de la ecuación. Ésta solución se llama $x_{sp}(t)$, y se conoce como solución periódica estacionaria. Para simplificar, se supone que $F(t)$ es una función impar con periodo $2L$, manera que su serie de Fourier toma la siguiente forma.

$$f(\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ sen\ \left(\frac{nt\pi}{L}\right)$$

Si $\frac{n\pi}{L}$ no es similar a w_0 para cierto entero positivo n, se puede representar una respuesta periódica en estado permanente de forma.

$$x_{sp}(\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ sen\ \left(\frac{nt\pi}{L}\right)$$

Resonancia pura

El término $B_n\ sen\ \left(\frac{Nt\pi}{L}\right)$ lo contrario de cero en la respuesta de la serie de

Fourier de la función de fuerza $F(t)$ representada , $\left(\frac{Nt\pi}{L}\right) = w_0$ es decir provoca

$$mx'' + kx = BN\ sen(w_0 t)$$

Posee respuesta de resonancia

$$x(t) = -\frac{B_N}{2mw_0} t\ cos(w_0 t)$$

Si $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ En este caso la solución correspondiente a la ecuación es entonces

$$x(t) = -\frac{B_N}{2mw_0}\ tcos(w_0 t) + \sum_{n\neq N} \frac{B_N}{m\left({w_0}^2 - n^2\ \frac{\pi^2}{L^2}\right) sen\ \frac{nt\pi}{L}}$$

Ejemplo

Suponga que $m = 2kg, k = 32\frac{N}{m}$ Determinar en qué momento se dará resonancia pura si $F(t)$ es la función impar periódica

$$F(t) = \begin{cases} +10\ si\ 0 < t < \pi \\ -10\ \mathrm{si}\ \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$F(t) = 10t, -\pi < t < \pi.$$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Respuesta

a) Esta se representa $w_0 = 4$, y la serie de Fourier de $F(t)$ es

$$\mathrm{F(t)} = \frac{40}{\pi}\left(sen(t) + \frac{1}{3}sen(et) + \frac{1}{5}sen(5t) \ldots.\right)$$

Es decir esta serie no posee $\mathrm{sen}(4t)$, no se presenta resonancia.

b) Lo cual se representa de la siguiente manera

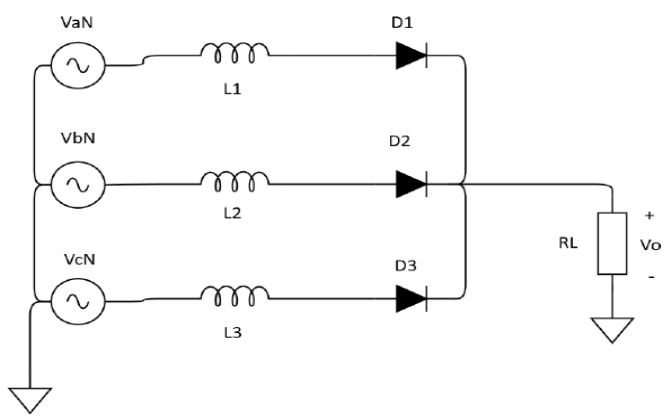
$$F(t) = 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\,(nt)$$

Aquí se manifiesta resonancia auténtica gracias a la inclusión del componente con factor $\mathrm{sen}(4t)$.

Rectificador trifásico de media onda no controlado

En la Figura 7 se evidencia el circuito del rectificador trifásico de media onda no controlado.

Figura 7. *Circuito rectificador de media onda no controlado*



Fuente: Elaboración propia

de las series de Fourier, suponiendo un valor de amplitud del voltaje pico sinusoidal de 163 voltios, con $n = 50$ armónicos Para generar la forma de onda del rectificador trifásico de media onda que no se encuentra controlado, se aplican las fórmulas de la serie de Fourier

$$\mathrm{V_o}(wt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(3\mathrm{nwt}) + b_n \mathrm{sen}(\mathrm{nwt})]$$

El isoperimétrico

En esta sección se presenta una solución hermosa y refinada a lo que resultó ser uno de los desafíos más complicados de la geometría bidimensional: el conocido problema isoperimétrico.

Lema

Si $f \epsilon L^2(S^1)$, entonces $f^{2'}(n) = \frac{1}{2\mathrm{in}\pi} f^2(n)$

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Demostración

$f^{2'}(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi nx}\,dx$ Integrando por partes obtenemos que

$$f^{2'}(n) = e^{-2\pi nx}\,f(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)e^{-2\pi in}(-2\pi in)dx = 2\pi\text{inf}\,(n)$$

Conclusiones

El análisis sistemático de las series de Fourier ha contribuido a una comprensión clara de esta herramienta. Gracias al análisis detallado de los fundamentos teóricos y a las aplicaciones se ha conseguido un conocimiento correcto y riguroso del tema, habiendo sentado las bases de su futura aplicación práctica, tanto en el ámbito de la ciencia como en el de las ingenierías, el cual proporciona soluciones adecuadas para resolver problemas.

La búsqueda y la selección de manera subjetiva de la bibliografía adecuada, fue la que garantizó el contenido al momento de capturar la información. La búsqueda y la selección de la bibliografía llevó a incorporar hasta varias aplicaciones en las que se utilizan las series de Fourier. El cuidadoso proceso de selección de la bibliografía hizo que la idea referencial, tenga información confiable y veraz sin que por eso el documento pierda la importancia que tiene como fuente bibliográfica.

El documento mencionado sirve como referencia en la formación académica complementaria como documento adicional dentro de la ESPOCH. Su enfoque es la enseñanza ordenada y brinda un panorama completo sobre la importancia de las series de Fourier y su impacto en la ciencia. El pensamiento crítico es un elemento esencial que ayuda en su desarrollo y que es cultivado a través de los ejemplos que se analizan.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Referencias

Acosta , E., Velasquez, R., Villena , C., & Analuiza , A. (2025). La relevancia del análisis de fourier en las matemáticas aplicadas: una herramienta esencial para la educación superior y los retos en su enseñanza para la formación de futuros profesionales. *Reinciso, 4*(7), 1562–1580. doi:https://doi.org/10.59282/reincisol.V4(7)1562-1580

Alagöz, S., & Baykant , B. (2021). Simulación de filtros espaciales ópticos mediante la transformada rápida de Fourier. *6*(3), 116-121. doi:Simulación de filtros espaciales ópticos mediante la transformada rápida de Fourier

Awasthi, A., & Kaushik, R. (2022). Series de Fourier y ecuaciones integrales de Fourier y sus aplicaciones en elasticidad. *Serie de conferencias de la Revista de Física*(1). doi:http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2267/1/012158

Cresswell, J. (2013). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches.* Obtenido de https://repositorio.ciem.ucr.ac.cr/bitstream/123456789/501/1/Qualitative%20inquiry%20%26%20research%20design.%20design%20_%20Choosing%20among%20five%20approaches.%20%281%29.pdf

Gonzales , I. (2017). . *Evolutoides de curvas convexas y la propiedad pedal de la elipse.* Universidad Autónoma de Querétaro, Mexico.

Matlam, J., Shende, S., & Lanjewar, D. (2023). Aplicaciones de las series de Fourier y la transformada de Fourier en dispositivos eléctricos y electrónicos. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Aplicadas y Tecnología de Ingeniería , 11*(4), 1657-1667. doi:http://dx.doi.org/10.22214/ijraset.2023.50376

Oberti, A., & Bacci, C. (2020). *Metodología de la investigación.* Obtenido de https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/programas/pp.12857/pp.12857.pdf

Ramos , C. (2020). LOS ALCANCES DE UNA INVESTIGACIÓN. *Cienci América, 9*(3). doi:http://dx.doi.org/10.33210/ca.v9i3.336

Retamozo , W. (2021). *El análisis de Fourier y su aplicación en las telecomunicaciones.* Univrsidad Nacional de la Educacion , Lima. Obtenido de https://repositorio.une.edu.pe/server/api/core/bitstreams/c8b6b959-378f-45cb-91c2-3ab769d878f2/content

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional

Rios, M. (2024). Investigación cualitativa en el contexto de la Salud Pública: actualización de conceptos. *Revista De Salud Publica Del Paraguay, 14*(1). doi:https://doi.org/10.18004/rspp.2024.abr.08

Rosales, C. (2020). *El problema isoperimétrico.* Obtenido de https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/80791/problema_isoperimetrico.pdf?

Santacruz , L. (2023). *Sistema de comunicación para la gestión y control de la seguridad electrónica dentro de una vivienda por medio de registros de eventos mediante Raspberry Pi.* Salesiana . Obtenido de http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/24064

Zandieh, A. (2020). *Muestreo de Fourier en el procesamiento de señales y el álgebra lineal numérica.* Obtenido de https://infoscience.epfl.ch/server/api/core/bitstreams/7c770780-6e96-40a4-bea9-4483725ceed8/content

Zorzano, A., & Zorzano , J. M. (2022). Una herramienta didáctica para ingeniería: Wikilibro en Electrónica de Potencia. *Wikilibro en Electrónica de Potencia. In La innovación como motor para la transformación de la enseñanza universitaria*, 397-403. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8527529.pdf

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Agradecimiento:

Este trabajo reconoce el apoyo institucional otorgado por la Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas de la Universidad Técnica de Cotopaxi (UTC), en particular por la carrera de Gestión del Talento Humano, así como por el área de Recursos Naturales de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), cuya contribución fue esencial para el desarrollo de esta investigación

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional