



Doi: <https://doi.org/10.70577/asce.v5i1.600>

**Recibido:** 2025-12-23

**Aceptado:** 2026-01-08

**Publicado:** 2026-01-14

**“Aplicación de la Mecánica Cuántica en El Régimen No-Relativista para  
Obtener los Niveles de Energía de un Electrón en el Efecto Aharonov-Bohm”**

**“Application of Quantum Mechanics at The Non-Relativistic Regime for  
Obtaining the Energy Levels of an Electron at the Aharonov-Bohm Effect.”**

**Autores**

**Omar Sebastián Muñoz Merino<sup>1</sup>**

[omar.munoz@esepoch.edu.ec](mailto:omar.munoz@esepoch.edu.ec)

<https://orcid.org/0009-0002-0933-4966>

**Escuela Superior Politécnica de  
Chimborazo**

Riobamba-Ecuador

**José Luis Cortés Llanganate<sup>2</sup>**

[jcortes@esepoch.edu.ec](mailto:jcortes@esepoch.edu.ec)

<https://orcid.org/0000-0002-3228-2669>

**Escuela Superior Politécnica de  
Chimborazo**

Riobamba-Ecuador

**Milton Jhoel Villacrés Vega<sup>3</sup>**

[milton.villacres@esepoch.edu.ec](mailto:milton.villacres@esepoch.edu.ec)

<https://orcid.org/0009-0000-7677-4764>

**Escuela Superior Politécnica de  
Chimborazo**

Riobamba-Ecuador

**Lidia Castro-Cepeda<sup>4</sup>**

Facultad de Ingeniería

<https://orcid.org/0000-0002-0471-2879>

[lidia.castro@unach.edu.ec](mailto:lidia.castro@unach.edu.ec)

**Universidad Nacional de Chimborazo**

Riobamba-Ecuador

**Cómo citar**

Muñoz Merino, O. S., Cortés Llanganate, J. L., Villacrés Vega, M. J., & Castro Cepeda, L. (2026). “Aplicación de la Mecánica Cuántica en El Régimen No-Relativista para Obtener los Niveles de Energía de un Electrón en el Efecto Aharonov-Bohm”. *ASCE MAGAZINE*, 5(1), 425–443.



## Resumen

En el presente trabajo de investigación, se desarrolló la dinámica del electrón bajo campos de calibre o también denominados potenciales electromagnéticos. Se estudió la importancia de los potenciales en la teoría cuántica y de como estos, son considerados cantidades físicas más fundamentales que los campos en sí. La modificación de la dinámica del electrón, causada por los potenciales en la teoría cuántica, se la conoce como *efecto Aharonov-Bohm*. Se planteó el efecto para el caso magnético, esto es, en presencia del potencial vector  $\vec{A}$ , considerando el movimiento del electrón alrededor de un solenoide de radio pequeño, muy largo, con campo magnético  $\vec{B}$  uniforme en su interior. Para la descripción del efecto y la importancia de los potenciales, el electrón orbita una región del solenoide donde el campo magnético es cero, pero el potencial vector no lo es, al mismo tiempo, se calculó los estados ligados de energía del electrón para este caso, y como estos, se ven modificados por el valor del flujo magnético al interior del solenoide, flujo al cual el electrón no está expuesto. Se explicó el significado de que el potencial vector, aparezca como un factor de fase en la función de onda que caracteriza a un electrón, el cual describe el cambio del patrón de interferencia entre dos haces de electrones, que pasan por los exteriores del solenoide, en una región excluida de campos, pero en presencia del potencial vector, lo que implica que el patrón de interferencia se desplace en la pantalla, debido a que los haces llegan con diferentes fases, esa diferencia se la representa como  $\Delta\Phi$ . El potencial vector es un campo auxiliar en electrodinámica clásica, sin embargo, en mecánica cuántica tiene implicaciones físicas en partículas cargadas. Se recomienda para evidencias experimentales, instrumentos que generen un campo magnético sin fugas, es decir una región excluida de campos.

**Palabras clave:** Potencial Vector, Solenoide, Electrón, Función De Onda, Niveles De Energía, Patrón De Interferencia.



---

## Abstract

In this research work, the dynamics of the electron were developed under gauge fields or also called electromagnetic potentials. The importance of potentials in quantum theory was studied, and how these are considered as more fundamental physical quantities, than the fields themselves. The modification of the electron dynamics, caused by the potentials in quantum theory, is known as the *Aharonov-Bohm effect*. The effect for the magnetic case was raised, that is, in the presence of the potential vector  $\vec{A}$ , considering the motion of the electron around a small, very long radius solenoid, with a uniform magnetic field  $\vec{B}$  inside. For the description of the effect and the importance of the potentials, the electron orbits a region of the solenoid where the magnetic field is zero, but the potential vector is not. At the same time, the bound energy states of the electron were calculated for this case, and thus they are modified by the value of the magnetic flux, inside the solenoid, flux to which the electron is not exposed. It explained the meaning of the potential vector appearing as a phase factor in the wave function that characterizes an electron, which describes the change in the interference pattern between two electron beams, which pass through the exterior of the solenoid, in a region excluded from fields; however, in the presence of the potential vector, which implies that the interference pattern moves on the screen, because the beams arrive on different phases, that difference is represented as  $\Delta\Phi$ . The potential vector is an auxiliary field in classical electrodynamics; however, in quantum mechanics it has physical implications on charged particles. It is recommended for experimental evidence, instruments that generate a magnetic field without leaks, that is, a region excluded from fields.

**Keywords:** Vector Potential, Solenoid, Electron, Wave Function, Energy Levels, Interference Pattern.



---

## Introducción

En mecánica clásica, el movimiento de partículas cargadas viene descrito directamente por acción de las fuerzas. El electrón bajo un campo electromagnético, se describe en función de la fuerza de Lorentz. Los campos eléctricos y magnéticos vienen planteados en las ecuaciones de Maxwell, las cuales pueden ser simplificadas a dos ecuaciones mediante el uso del potencial vector  $\vec{A}$  y potencial escalar  $\varphi$ .

La importancia de los potenciales en la mecánica cuántica, fue planteado por (Bohm, 1959) donde discutieron, como el electrón podría ser influenciado por los potenciales, aun si todos los campos físicos fueran apartados de este, a este fenómeno se conoció como *efecto Aharonov-Bohm*

El *efecto Aharonov-Bohm* es una predicción teórica, que considera a la mecánica cuántica como la teoría esencial para describir dicho fenómeno. En la mecánica clásica, los potenciales no tienen significado físico, ya que las ecuaciones de movimiento vienen descritas por campos físicos. En la teoría cuántica las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada son sustituidas por la ecuación de Schrödinger para una onda.

La ecuación de Schrödinger, que es la ecuación fundamental para describir el efecto, en un régimen no-relativista, viene representada desde el formalismo canónico, el cual no puede manifestarse únicamente en términos de campos, se necesita también la representación de los potenciales.

Estos campos auxiliares o potenciales, sufren transformaciones de calibre, que no alteran las propiedades físicas observables. Los potenciales, también conocidos como campos de calibre, dejan invariante las ecuaciones de movimiento, en este caso las ecuaciones del campo electromagnético. Los potenciales modifican el comportamiento dinámico en las partículas cargadas, incluso cuando no existe campos, sin embargo, este comportamiento solo se da empleando la teoría cuántica.

El trabajo de investigación está distribuido en cuatro capítulos. En el capítulo I, se analiza la problemática del estudio y porque se lo desea realizar, describiendo anteriores trabajos acerca del *efecto Aharonov-Bohm*, que han tenido relevancia en la mecánica cuántica, relacionando al electrón con los potenciales.



Se realizó una revisión minuciosa, empezando desde el punto vista de la mecánica clásica, con la teoría de Maxwell para el electromagnetismo que incluye a los potenciales, y la invarianza de las ecuaciones de movimiento, además de describir el formalismo lagrangiano y hamiltoniano. En el caso de la teoría cuántica se detalla fundamentos básicos, a partir de la ecuación de Schrödinger.

Se planteo el formalismo canónico, determinando la lagrangiana y el hamiltoniano para el electrón en un campo electromagnético. Se calcula el valor exacto del potencial vector  $\vec{A}$ , que se genera fuera del solenoide a partir del campo magnético interno generado por una corriente eléctrica, así como el flujo magnético. El tratamiento cuántico se describe en dos etapas diferentes. La primera es encontrar los estados ligados de energía del electrón, al pasar por el solenoide, en una región donde el campo magnético es igual a cero, pero el potencial vector no lo es, empleando la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. La segunda parte, se basa en la importancia del potencial vector como factor de fase en la función de onda del electrón, y mediante la interferencia de dos haces de electrones (experimento de la doble rendija) que pasan por los exteriores del mismo solenoide, se logra determinar la diferencia de fase adquirida entre los haces, siendo esta la cantidad que modifica o desplaza el patrón de interferencia.

Finalmente, se analizó los resultados obtenidos, a partir de los estados ligados de energía del electrón y la relevancia del potencial como factor de fase, discutiendo la importancia del potencial vector en la mecánica cuántica (*efecto Aharonov-Bohm*). Así mismo, se dan a conocer las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

## Material y Métodos

Se plantea encontrar el hamiltoniano de un electrón en un campo electromagnético, a partir de la interpretación de la fuerza de Lorentz, así mismo, se propone encontrar el valor del potencial vector en un solenoide muy fino, donde se induce una corriente eléctrica. A partir de estos cálculos, se dispone un tratamiento cuántico, encontrando los estados ligados del electrón alrededor del solenoide, y la explicación acerca del cambio en el patrón de interferencia de un haz de electrones alrededor del solenoide, debido al potencial vector. Las dos últimas descripciones son fenómenos directos del *efecto Aharonov-Bohm*.

## Formalismo canónico – electrón sometido a un campo electromagnético

Es un requisito fundamental obtener el formalismo canónico para un electrón en interacción con un campo electromagnético, ya que el tratamiento final que se dará a la dinámica del electrón será mediante el empleo de la mecánica cuántica. Por esa razón se necesita encontrar la lagrangiana y el hamiltoniano del problema. Para ello se usa la interpretación del campo eléctrico  $\vec{E}$  y campo magnético  $\vec{B}$  en forma de potenciales (Wächter, 2018).

### *Hamiltoniano para un electrón en un campo electromagnético*

Para ver el efecto de los potenciales en el electrón en consideración con la teoría cuántica, se necesita encontrar el formalismo hamiltoniano. Para esto, anteriormente, se determinó la formula general para encontrar la función hamiltoniana, para cualquier sistema físico, la cual está en dependencia con la función lagrangiana, la fórmula para encontrar el hamiltoniano en nuestro sistema viene dada por,

$$H(x_i, p_i, t) = \left[ \sum_{i=1}^N \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \mathcal{L} \right].$$

No obstante, para este sistema físico el cual consta de un electrón en un campo electromagnético,  $\dot{x}_i$  representa la velocidad del electrón  $\vec{v}$ ,  $p_i$  es el momento generalizado  $\vec{p}$ , y  $\mathcal{L}$  es la lagrangiana (99). Siendo así, (101) puede venir escrita como:

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \left( m\vec{v}^2 + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) - \left( \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)$$

Simplificando,

$$H = \frac{1}{2m} \Pi^2 + e\varphi = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi$$



donde  $\Pi = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ , es el momento cinético representado por el momento generalizado  $\vec{p}$  y el potencial vector  $\vec{A}$  (Orasch & Hohenester, 2014).

Con el hamiltoniano encontrado, se puede llevar directamente el problema del electrón en interacción con el potencial vector hacia un tratamiento cuántico simplemente aplicando primera cuantización, aunque para ello se necesita conocer cuál es el valor exacto del potencial vector  $\vec{A}$  en un solenoide, que será tratado en la sección siguiente.

### **Potencial vector de un solenoide**

Se considera un solenoide largo y de radio pequeño  $b$ , donde circula una corriente  $i$  con un campo magnético  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , y flujo magnético  $\Phi_B$ , colocado a lo largo del eje  $\hat{z}$  (Ferrer et al., 2013).

El campo magnético se encontrará confinado en el interior del solenoide, es decir fuera de este el campo es cero, aun cuando el potencial vector no lo es, lo cual implica la interacción directa con el electrón al pasar por los exteriores del solenoide, siendo este el objetivo fundamental para entender el *efecto Aharonov-Bohm*.

### ***Campo magnético en el solenoide***

Como primera parte se calcula el campo magnético en el interior del solenoide, donde circula una corriente  $i$ , y las líneas de campo dentro del solenoide, determinan un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ .

Esta ley expresa la circulación del campo magnético a través de un circuito cerrado, representado por una integral de línea, donde esta, es directamente proporcional a la corriente que circula por la trayectoria mostrada en la figura 2-2, la corriente encerrada  $i_{enc}$  (Griffiths, 1999).

La integral solo se calcula en la sección interna del solenoide, ya que fuera de este el campo magnético es igual a cero  $\vec{B} = \vec{0}$ , el diferencial de línea  $d\vec{l}$  representa la longitud  $L$  de la sección interna, por lo que la ley de Ampère se reduce a:

$$BL = \frac{4\pi}{c} i_{enc}.$$



### *Flujo magnético en el solenoide*

El cálculo del flujo magnético  $\Phi_B$  se lo puede desarrollar de dos maneras distintas, una relacionándolo con el campo magnético previamente encontrado y el otro con el potencial vector  $\vec{A}$ . Para ello considérese un área anular del solenoide de radio  $b$ , sobre la cual pasan las líneas de campo magnético y los diferentes elementos de área o superficie  $d\vec{S}$ .

La relación entre el flujo magnético y el campo magnético viene dada por la siguiente ecuación:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Esta integral de superficie, se resuelve considerando al diferencial de superficie igual a  $d\vec{S} = \hat{z} S$  donde  $S$  es el área de la espira del solenoide, y  $\hat{z}$  el versor respecto al eje  $z$  (Ferrer et al., 2013). El área de la espira está representada como  $S = \pi b^2$ .

### *Potencial vector fuera del solenoide*

El valor del potencial vector  $\vec{A}$  es fundamental, ya que está explícitamente en la función hamiltoniana previamente encontrada.

Si el electrón viaja en las cercanías del solenoide, pero sin entrar, entonces no interactúa directamente con el campo magnético, ya que fuera del solenoide, el campo es igual a cero, sin embargo, el potencial vector no lo es.

Se plantea encontrar el potencial  $\vec{A}$  en un punto  $P = (\rho, \phi, z)$ , coordenadas cilíndricas por la simetría del problema. El potencial es producido por una espira de radio  $b$ , donde circula una corriente  $i$ , siendo  $\rho \gg b$ , el radio desde el centro de la espira al punto  $P$  fuera del solenoide.

El flujo magnético fuera del solenoide  $\Phi$  tiene el mismo valor que el flujo magnético en el interior del solenoide  $\Phi_B$ , es decir  $\Phi = \Phi_B$ , ya que el flujo total, es la suma del flujo dentro y fuera del solenoide.

Para el cálculo del potencial vector, se utiliza el teorema de Stokes, que relaciona dicho potencial con el campo magnético y el flujo magnético (Rodríguez, 2013). Esto viene dado por:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

## Efecto Aharonov-Bohm – fenómeno de interferencia

### *Potencial vector como factor de fase*

Para poder describir el *efecto Aharonov-Bohm*, siendo un efecto aplicado a la teoría cuántica, se necesita el formalismo hamiltoniano, para un electrón en un campo electromagnético, esto viene dado por la ecuación (103). Sin embargo, es requerido aplicar primera cuantización, por lo tanto, el operador hamiltoniano toma la forma,

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi \right] = \hat{H},$$

### *Experimento de la doble rendija*

El fenómeno de interferencia sucede por la superposición de ondas, además de obtener franjas estacionarias (patrón de interferencia) (Kregar, 2011).

Se propone un experimento donde un haz coherente de electrones se divide en dos, al pasar por rendija de dos ranuras, los dos haces de electrones pasan rodeando al solenoide en una región donde  $\vec{A} \neq \vec{0}$  y  $\vec{B} = \vec{0}$ . Se observa como los dos haces de electrones cada uno representado por su función de onda  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , describen un camino desde  $\vec{x}_1$  a  $\vec{x}_2$ , al recombinarse los haces, ellos llegan con diferentes fases. La idea de plantear este experimento, no recae en determinar el patrón de interferencia, al contrario, es determinar la cantidad física que provoca que el patrón de interferencia en una región de  $\vec{A} \neq \vec{0}$  y  $\vec{B} = \vec{0}$ , se desplaza, la diferencia de fase. El paso de los haces es lo bastante lento, con el fin de que los campos sean percibidos por las partículas como estáticos, es decir un camino solo en el espacio ( $t = 0$ ) (Bohm, 1959).

### **Otro Efecto Aharonov-Bohm - Niveles de energía del electrón alrededor del solenoide.**

En esta sección se determina como el potencial vector  $\vec{A}$ , tiene influencia directa en la dinámica del electrón, específicamente en los estados ligados o valores propios de energía del mismo. Para lograr esto, se emplea la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, las soluciones a esta



ecuación arrojan los estados ligados de energía y los estados propios o funciones propias del electrón, bajo interacción del potencial vector (Griffiths & Schroeter, 2018).

Se estudia el caso en que el electrón se mueve circularmente alrededor del solenoide, con un radio  $\rho$ , esto es posible debido a que la velocidad de la partícula posee la misma dirección que el potencial vector  $\vec{A}$ .

Esto se observa directamente por la lagrangiana que describe a un electrón en un campo electromagnético (99), específicamente en el término de la energía potencial  $e\left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}\right)$ .

El electrón se encuentra fuera del solenoide, es decir  $\rho \gg b$ , en esta región el campo magnético es igual a cero  $\vec{B} = \vec{0}$ , pero no lo es el potencial vector  $\vec{A}$ . La partícula igual que el potencial se encuentran en el plano  $z = 0$ , esto debido a la simetría del problema, así la ecuación de Schrödinger se plantea en coordenadas cilíndricas con el ángulo azimutal  $\phi$ , ya que la componente del potencial vector es  $A_\phi$ .

## Resultados

### Discusión sobre el flujo magnético $\Phi$ y flujo de London $\Phi_L$ .

Se imagina como primera situación al solenoide apagado, es decir en ausencia de un flujo magnético, y el electrón se encuentra en el estado fundamental, para  $n = 0$ .

Si se incrementa el flujo lentamente, considerando el teorema adiabático, que dictamina que si colocamos al electrón en un estado de energía no degenerado y se varía los parámetros gradualmente (flujo magnético), el electrón permanecerá en el mismo estado propio, en otras palabras, para  $n = 0$ . De igual manera, el electrón percibe al potencial  $\vec{A}$  como estático, debido al teorema adiabático.

No obstante, a medida que se aumenta el flujo magnético  $\Phi$ , se logra alcanzar  $\Phi = \Phi_L$ . En consecuencia, el electrón ya no se encuentra en el estado fundamental, según la ecuación.

Al caracterizar el flujo magnético  $\Phi$  con el parámetro de intensidad  $\delta$ , se tiene,

$$\frac{\Phi}{\Phi_L} = \delta$$

dicho de otra manera, el flujo  $\Phi$  es múltiplo de  $\Phi_L$ , y aumenta por unidad de flujo de London  $\Phi_L$ .

### Significado de $n$ positiva y $n$ negativa para los niveles de energía

Según los estados propios  $\psi_n(\phi)$  para el electrón, dados e igualmente los estados ligados de energía (157),  $n$  toma valores enteros. Los niveles de energía del electrón, pueden reescribirse como:

$$E_n = \frac{1}{2m\rho^2} \left( n\hbar - \frac{e\Phi}{2\pi c} \right)^2.$$

De la ecuación se deduce que, los estados  $\psi_n$  tienen un momento angular canónico específico  $L_z$ , dado por:

$$L_z = n\hbar$$

donde el momento angular tiene componente en  $z$ , ya que el electrón orbita al solenoide el cual está colocado entorno al eje  $z$ , y el número  $n$  cuantiza la componente  $L_z$  del momento angular orbital en múltiplos de  $\hbar$ . Por lo tanto, para valores positivos de  $n$  el electrón se mueve en dirección de las agujas del reloj, y en dirección contraria para valores de  $n$  negativos.

Además, los valores propios del electrón, determinan si su energía es mayor o menor. Se representa los niveles de energía de la forma:  $E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left( n - \frac{e\Phi}{\hbar c} \right)^2$

Si  $n$  adquiere valores negativos entonces la energía del electrón será mayor que para valores negativos, esto debido a la carga del electrón ( $e = -e_0 < 0$ ). En otras palabras, queda representada

como:  $E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left( n + \frac{e_0\Phi}{\hbar c} \right)^2$

### Espectro de energía no degenerado (electrón alrededor del solenoide)

Para cualquier sistema físico, al cual una partícula pertenece, su espectro de energía se denomina no degenerado, cuando para cada nivel de energía (estados ligados de energía o valores propios) existe un solo estado propio  $\psi_n$  que lo caracterice.



Por ejemplo, se tiene el caso de un oscilador armónico cuántico, el cual se emplea para examinar las oscilaciones de átomos en moléculas, los valores propios de energía para este sistema vienen dados por:  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ .  $n = 0, 1, 2, \dots$

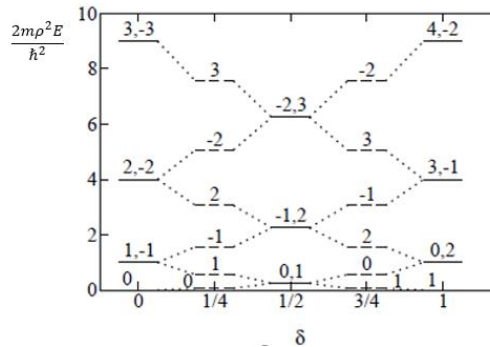
Los niveles de energía están cuantizados, en otras palabras, solo adquieren valores discretos. Asimismo, se logra identificar que el estado fundamental de energía para este caso no es cero, al contrario, es  $(1/2)\hbar\omega$ . Esto es un ejemplo de sistema no degenerando, ya que, para valores enteros de  $n$ , a cada nivel de energía (164) le corresponde un solo estado propio  $\psi_n$ .

### **Espectro de energía degenerado (electrón alrededor del solenoide)**

Un ejemplo claro acerca de un sistema cuántico con degeneración, es la solución para un átomo hidrogenoide, en tal sistema, los niveles energéticos del átomo consiguen acoger dos electrones con el mismo valor de energía (mismo autovalor), de manera que, cada electrón está en uno de los dos estados probables para este autovalor, en consecuencia, los dos estados son estados degenerados.

Otro sistema cuántico con degeneración, es para el caso en que un electrón orbita un solenoide, donde el campo magnético está ausente, pero el potencial vector no, es decir, el caso de este estudio. El espectro energético aquí presenta doble degeneración, considerando  $\Phi = \delta\Phi_L$ , en el cual el flujo magnético al interior del solenoide aumenta en unidades del flujo de London  $\Phi_L$ , hasta alcanzar el mismo valor  $\Phi = \Phi_L$ , para  $\delta = 1$ . Para diferentes valores de  $n$ , sin considerar el caso no degenerado (valores de  $n$  de igual magnitud y que difieran de signo), el sistema presenta doble degeneración si  $\delta$  es semientero o entero, ya que existe dos posibles estados propios que posean la misma energía.

**Figura 1.** Espectro de energía para distintos valores de  $n$  e intensidades del flujo magnético.



**Realizado por:** (Ferrer et al., 2013).

Por ejemplo, para dos estados  $\psi_{-2}$  y  $\psi_4$ , asociados al mismo valor de energía, y  $\delta = 1$  esto es,

$$E_{-2} = E_4 = \frac{9\hbar^2}{2m\rho^2}$$

Al fenómeno en el cual, el flujo aumenta en unidades del flujo de London, y con un espectro de energía con degeneración doble, se lo conoce como flujo espectral, ya que los niveles de energía para un electrón alrededor de un solenoide el cual es encendido adiabáticamente, depende principalmente del valor del flujo magnético, al cual el electrón no está expuesto.

Según, los niveles están relacionados al valor del flujo magnético, sin embargo, en la región donde el electrón orbita el solenoide, el flujo magnético no está presente. Entonces, la aparición del flujo  $\Phi$  recae en el potencial vector  $\vec{A}$ , presente en el operador Hamiltoniano. El potencial  $\vec{A}$  determina los posibles estados del electrón cuando este orbita el solenoide en una locación con  $\vec{B} = \vec{0}$ , una causa directa de la importancia de los potenciales en la mecánica cuántica, y sin duda una clara descripción del efecto Aharonov-Bohm.

### Discusión acerca de la importancia del factor de fase en el fenómeno de interferencia

La aparición del factor  $\exp[i\theta(\vec{x})]$ , sucede al considerar el caso en que un electrón se dispone a una región donde  $\vec{B} = \vec{0}$ , pero el potencial es  $\vec{A} \neq \vec{0}$ , la solución a la ecuación de Schrödinger vendrá dada para el caso en que el potencial es  $\vec{A} = \vec{0}$  más el factor de fase, por lo tanto, este factor, no es ninguna arbitrariedad.



La importancia del potencial en el fenómeno de interferencia, se da en la diferencia de fase total entre dos haces de electrones que pasan por el solenoide, para luego recombinarse y formar un patrón de interferencia en la pantalla, esta diferencia entre las fases de la función onda que representa a cada haz, viene dado por la ecuación,

$$\Delta\Phi = \frac{e}{c\hbar} \Phi.$$

En otras palabras, la interferencia de dos haces de electrones con sus respectivas funciones de onda, se ve modificada por el flujo magnético dentro del solenoide, sin embargo, los haces no experimentan este flujo. Así pues, el flujo magnético nace de la relación del potencial vector entorno a un circuito cerrado mediante el teorema de Stokes.

A medida que el flujo magnético aumenta en el interior del solenoide, la diferencia de fase entre los haces se ve modificada, y por consiguiente su patrón de interferencia cambia (desplazamiento de las franjas estacionarias en la pantalla). Esta diferencia ha sido calculada previamente por (Chambers, 1960) y se ha convertido en una evidencia experimental directa del significado físico del potencial vector  $\vec{A}$  en ausencia de campos, es ha esto a lo que se llama efecto *Aharonov-Bohm*, de igual manera otro *efecto Aharonov-Bohm* es el descrito anteriormente para los niveles de energía del electrón.

### Análisis de los Resultados

El análisis del espectro energético del electrón orbitando un solenoide revela una dependencia directa entre los niveles de energía  $E_n$  y el flujo magnético  $\Phi$ , incluso cuando el campo magnético  $B$  es nulo en la trayectoria del electrón. A través de la parametrización del flujo con la intensidad  $\delta$  (donde  $\Phi/\Phi_L = \delta$ ), se observa que el estado fundamental del sistema varía adiabáticamente. La ecuación de energía demuestra que los valores propios no solo dependen del número cuántico entero  $n$ , que cuantiza el momento angular canónico  $L_z$ , sino también de la dirección de rotación del electrón (horaria o antihoraria) y de la magnitud del flujo encerrado, validando la influencia del potencial vector  $\vec{A}$  en la dinámica cuántica del sistema.

Un hallazgo significativo es la presencia de degeneración en el espectro de energía, fenómeno que contrasta con sistemas no degenerados como el oscilador armónico. Como se observa en la



representación del espectro para distintos valores de  $n$  e intensidades de flujo (Ferrer et al., 2013), el sistema presenta una "doble degeneración" cuando el flujo magnético  $\Phi$  aumenta en unidades enteras o semienteras del flujo de London  $\Phi_L$ . Esto da lugar al denominado flujo espectral, donde estados cuánticos distintos, por ejemplo  $\psi_{-2}$  y  $\psi_{-4}$ , convergen en un mismo valor energético para un  $\delta$  específico, confirmando que la periodicidad del espectro energético es una manifestación intrínseca del efecto Aharonov-Bohm en estados ligados.

Los resultados ratifican la relevancia física del potencial vector  $\vec{A}$  más allá de ser una herramienta matemática, evidenciada a través del fenómeno de interferencia. La aparición de un factor de fase dependiente del potencial  $\vec{A}$  modifica la función de onda de los haces de electrones, generando una diferencia de fase total  $\Delta\Phi$  proporcional al flujo magnético encerrado. Este desplazamiento en las franjas de interferencia, predicho teóricamente y consistente con la evidencia experimental previa de Chambers (1960), demuestra que el electrón experimenta efectos físicos medibles debido al flujo magnético distante, consolidando la interpretación del efecto Aharonov-Bohm como una interacción fundamental en la mecánica cuántica.

## Discusión

Los resultados obtenidos respecto a la influencia del potencial vector en regiones donde el campo magnético está ausente corroboran los postulados fundamentales establecidos por Peshkin (1989). Al igual que en nuestro análisis, estos autores demostraron que los potenciales electromagnéticos no son meros auxiliares matemáticos, sino entidades físicas fundamentales en la teoría cuántica. La dependencia de la energía del electrón con respecto al flujo magnético encerrado, incluso cuando la partícula no atraviesa el campo, confirma la naturaleza no local de la interacción, un hallazgo que representó una ruptura significativa con la física clásica y que nuestros resultados validan teóricamente.

En cuanto al fenómeno de interferencia y el desplazamiento de fase observado, nuestros planteamientos coinciden con las primeras validaciones experimentales reportadas por Chambers (1960), quien detectó el desplazamiento de las franjas de interferencia predicho teóricamente. Sin embargo, es relevante contrastar que, si bien Chambers proporcionó la evidencia inicial, autores



posteriores como Tonomura (1986) refinaron estos experimentos utilizando técnicas más avanzadas para eliminar cualquier fuga de campo magnético. La consistencia de nuestro análisis con los hallazgos de Tonomura refuerza la interpretación de que el cambio de fase es un efecto puramente topológico, dependiente del flujo encerrado y no de fuerzas locales.

El comportamiento cíclico del espectro de energía y su relación con el flujo de London presenta una fuerte concordancia con los teoremas desarrollados por Byers y Yang (1961). Estos autores establecieron que las propiedades físicas de un sistema de partículas cargadas en una configuración de este tipo deben ser periódicas con respecto a unidades específicas de flujo magnético. La degeneración observada en nuestros resultados y el fenómeno del flujo espectral son manifestaciones directas de esta periodicidad fundamental, demostrando que el estado del sistema retorna a una configuración equivalente al variar el flujo en cantidades discretas, tal como lo predicen estos autores.

La interpretación del factor de fase y la evolución lenta del sistema se alinea con la generalización geométrica propuesta por Berry (1984). Mientras que nuestro estudio se centra en el caso particular del solenoide, Berry demostró que la adquisición de una fase adicional es un fenómeno universal en sistemas cuánticos sometidos a variaciones adiabáticas de parámetros externos. La conexión establecida en nuestros resultados entre el teorema adiabático y la persistencia del estado cuántico bajo variaciones graduales del flujo, valida la inserción del efecto estudiado dentro del marco más amplio de las fases geométricas en la mecánica cuántica moderna.

## Conclusiones

La teoría clásica, que describe el comportamiento de un electrón, viene fundamentada por la mecánica lagrangiana y la mecánica hamiltoniana, siendo la última, una formulación que lleva al sistema clásico a la mecánica cuántica de una manera muy natural, mediante el operador Hamiltoniano. En la mecánica cuántica es necesario el formalismo canónico, de esa manera los potenciales no son eliminados de las ecuaciones de movimiento (ecuación de Schrödinger y Works, 1926).



El campo magnético generado por un solenoide solo está presente en el interior del solenoide, y es nulo fuera del mismo. A diferencia del campo magnético  $\vec{B}$ , el potencial vector asociado  $\vec{A}$  está presente tanto dentro como fuera del solenoide, esto debido a la relación entre el flujo magnético y el potencial, debido al teorema de Stokes. En consecuencia, es importante la representación potencial de los campos eléctrico y magnético, no solo para determinar el valor del potencial vector, sino también porque esto conlleva a establecer la formulación canónica a partir de la ecuación clásica de movimiento para un electrón en un campo electromagnético, la fuerza de Lorentz.

Los estados ligados de energía para el electrón, en una región del solenoide donde el campo magnético es nulo, pero no el potencial, son proporcionales al valor del flujo magnético que se genera dentro del solenoide, al cual el electrón no está sometido, sin embargo, la interacción con el potencial vector determina que los autovalores de energía se relacionen con el flujo, ya que este está incluido en el valor del potencial.

El factor de fase, que aparece como solución a la ecuación de Schrödinger para el electrón que orbita el solenoide, es el encargado directo, para describir el cambio en el patrón de interferencia entre dos haces de electrones. Los haces al pasar por una región del solenoide donde  $\vec{B} = \vec{0}$  y  $\vec{A} \neq \vec{0}$  adquieren diferentes fases, la diferencia de las fases de los haces viene determinada por el valor del flujo magnético dentro del solenoide, el patrón cambia a medida que el flujo  $\Phi$  cambia, una consecuencia directa del potencial vector  $\vec{A}$  (*efecto Aharonov-Bohm*).

Los potenciales electromagnéticos sugieren ser entidades físicas mucho más fundamentales que los campos físicos. El efecto *Aharonov-Bohm* es un fenómeno netamente de origen cuántico. En mecánica clásica los potenciales no tienen ningún significado físico, porque las ecuaciones envuelven solo cantidades de campo, en otras palabras, los potenciales son establecidos como campos auxiliares netamente matemáticos, de ahí la relevancia de las transformaciones de calibre de estos, para dejar invariante las ecuaciones de movimiento en electrodinámica. No obstante, en la teoría cuántica, estos campos auxiliares se consideran como cantidades con significado físico para describir la dinámica de partículas cargadas, que se toma en regiones del espacio donde los campos físicos están ausentes, pero no los potenciales, y el *efecto Aharonov-Bohm* existe.



---

## Referencias Bibliográficas

- Berry, M. V. (1984). The adiabatic limit and the semiclassical limit. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17(6), 1225.
- Bohm, Y. A. and D. (1959). Significance of Electromagnetic UPnoivteersnitytials in the Quantum Theory. *Physical Review*, 1(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485>
- Byers, N., & Yang, C. N. (1961). Theoretical Considerations Concerning Quantized Magnetic Flux in Superconducting Cylinders. *Physical Review Letters*, 7(2), 46–49. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.7.46>
- Chambers, R. G. (1960a). Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, 5(1), 3–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.5.3>
- Chambers, R. G. (1960b). Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. *Physical Review Letters*, 5(1), 3–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.5.3>
- Chambers, R. G. (1960c). Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. *Physical Review Letters*, 5(1), 3–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.5.3>
- Ferrer, R., Massman, H., Roessler, J., & Rogan, J. (2013). *Mecánica cuántica I* (Vol. 1). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Griffiths, D. J. (1999). Introduction to Electrodynamics. En P. Hall (Ed.), *Notes and Queries* (3ra ed., Vols. s9-V, Número 121). <https://doi.org/10.1093/nq/s9-V.121.316-c>
- Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). Introduction to Quantum Mechanics. En *Introduction to Quantum Mechanics* (3ra ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1142/8428>
- Kregar, A. (2011). AHARONOV - BOHM effect. En *Mesoscopic Physics in Complex Media* (pp. 1–12). Univerza v Ljubljani. <https://doi.org/10.1051/iesc/2010mpcm01005>



Orasch, O., & Hohenester, U. (2014). *Karl-Franzens-Universität Graz The Aharonov-Bohm-Effect*. Karl-Franzens-Universität Graz.

Peshkin, M. (1989). The Aharonov-Bohm effect Part one: Theory. En M. Peshkin & A. Tonomura (Eds.), *The Aharonov-Bohm Effect* (Vol. 340, pp. 1–34). Springer-Verlag.  
<https://doi.org/10.1007/BFb0032077>

Rodríguez, V. (2013). *No* (U. Editorial, Ed.; 1ra ed.).

Schrödinger, E., & Works, C. (1926). SCHRÖDINGER 1926C. *Annalen der Physik*, 79, 734.

Tonomura, Y. (1986). *Energy-Transducing ATPases-structure and kinetics*. Cambridge University Press.

<https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=6VE9AAAIAAJ&oi=fnd&pg=PP13&dq=Tonomura+et+al.+1986&ots=ie7YSONsEG&sig=F7MgXLlpc4-qztbCFYOCpEPPkqs>

Wächter, S. (2018). *The Aharonov-Bohm effect* (pp. 1–14).

#### **Conflicto de intereses:**

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

#### **Financiamiento:**

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

#### **Agradecimiento:**

N/A

#### **Nota:**

El artículo no es producto de una publicación anterior.