ASCE MAGAZINE ISSN: 3073-1178

Revista ASCE Magazine, Periodicidad: Trimestral Enero - Marzo, Volumen: 5, Número: 1, Año: 2026 páginas 1150 - 1169

Doi: https://doi.org/10.70577/asce.v5i1.637

Recibido: 2025-12-30
Aceptado: 2026-01-13
Publicado: 2026-02-04

Análisis de estabilidad y convergencia en métodos numéricos de diferencias finitas para ecuaciones de calor y onda en una dimensión espacial

Stability and Convergence Analysis of Finite Difference Numerical Methods for One-Dimensional Heat and Wave Equations

Autores

Martha Rebeca Cevallos Taimal[1]
rebeca.cevallos@docentes.educacion.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-9211-4191
Universidad Central del Ecuador; Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Quito – Ecuador

Mishell Dayana Usca Chicaiza[2]
mishell.usca@docentes.educacion.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-2704-5628
Universidad Central del Ecuador
Quito – Ecuador

Josselyn Dayanna Caizaluisa Lara[3]
josselyn.caizaluisa@docentes.educacion.edu.ec
https://orcid.org/0009-0001-6617-3735
Universidad Central del Ecuador
Quito – Ecuador

Jessica Gabriela Grandes Padilla[4]
jessica.grandes@docentes.educacion.edu.ec
https://orcid.org/0009-0004-0807-698X
Universidad Central del Ecuador; Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Quito – Ecuador

Judith Johanna Portilla Vásquez[5]
jujoha_81@yahoo.es
https://orcid.org/0009-0007-0182-1280
Universidad de Guayaquil
Guayaquil – Ecuador

Cómo citar

Cevallos Taimal, M. R., Usca Chicaiza, M. D., Caizaluisa Lara, J. D., Grandes Padilla, J. G., & Portilla Vásquez, J. J. (2026). Análisis de estabilidad y convergencia en métodos numéricos de diferencias finitas para ecuaciones de calor y onda en una dimensión espacial. ASCE MAGAZINE, 5(1), 1150–1169.

Resumen

Las ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico e hiperbólico son esenciales para modelar procesos de difusión y propagación, como la transferencia de calor y la dinámica de ondas, por lo que en aplicaciones reales se recurre a métodos numéricos, entre los cuales las diferencias finitas destacan por su simplicidad y eficiencia en dominios unidimensionales con mallado uniforme y fronteras Dirichlet o Neumann. Este trabajo analiza de manera sistemática la evidencia teórica y numérica publicada entre 2020 y 2025 sobre estabilidad, orden de convergencia y costo computacional de esquemas explícitos, implícitos y semimplícitos aplicados a la ecuación de calor y, complementariamente, a la ecuación de onda en 1D. La revisión se ejecutó a través de un análisis estructurado en bases científicas de renombre como es el caso de SCOPUS, Web of Science, SciELO y Google Académico donde se seleccionó treinta artículos denominados open- access a través de un análisis de estabilidad, estimaciones de error y pruebas comparativas del ámbito numérico. De esta manera, los resultados indican que los esquemas explícitos clásicos presentan restricciones debido a criterios tipo CFL lo cual afecta la eficiencia global cuando se requieren mallas finas. Por otro lado, los métodos implícitos y semimplícitos con especial énfasis Crank–Nicolson, ofrecen mayor convergencia de segundo orden a través de la ejecución de procesos algebraicos y un incremento en el costo por paso temporal. Asimismo, se observa que esquemas compactos de alto orden y variantes explícitas estabilizadas pueden aportar compromisos competitivos entre precisión y eficiencia bajo condiciones estándar. La elección del esquema debe basarse en un criterio integral que combine estabilidad práctica, precisión y costo computacional según la ecuación y el régimen de discretización.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales parciales; Diferencias finitas; estabilidad numérica; convergencia; ecuación de calor; ecuación de onda.

Abstract

Parabolic and hyperbolic partial differential equations are essential for modeling diffusion and propagation processes, such as heat transfer and wave dynamics. Therefore, numerical methods are used in real applications, among which finite differences stand out for their simplicity and efficiency in one-dimensional domains with uniform meshing and Dirichlet or Neumann boundaries. This work systematically analyzes the theoretical and numerical evidence published between 2020 and 2025 on stability, order of convergence, and computational cost of explicit, implicit, and semi-implicit schemes applied to the heat equation and, complementarily, to the 1D wave equation. The review was carried out through a structured analysis in renowned scientific databases such as SCOPUS, Web of Science, SciELO, and Google Scholar, where thirty open-access articles were selected through an analysis of stability, error estimates, and comparative tests in the numerical field. The results indicate that classical explicit schemes have restrictions due to CFL-type criteria, which affects overall efficiency when fine meshes are required. On the other hand, implicit and semi-implicit methods, with special emphasis on Crank–Nicolson, offer greater second-order convergence through the execution of algebraic processes and an increase in the cost per time step. Likewise, it is observed that high-order compact schemes and stabilized explicit variants can provide competitive trade-offs between accuracy and efficiency under standard conditions. The choice of scheme should be based on a comprehensive criterion that combines practical stability, accuracy, and computational cost according to the equation and discretization regime.

Keywords: Partial differential equations; Finite difference methods; Numerical stability; Convergence; Heat equation; Wave equation.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico e hiperbólico constituyen una de las herramientas matemáticas fundamentales para la modelación de fenómenos físicos asociados a procesos de difusión, propagación y transporte, entre los que destacan la transferencia de calor y la propagación de ondas en medios continuos, cuya resolución analítica solo es posible en configuraciones altamente idealizadas, por lo que en contextos realistas se recurre de manera sistemática a métodos numéricos que permitan aproximar sus soluciones bajo condiciones iniciales y de frontera diversas, siendo los métodos de diferencias finitas uno de los enfoques más utilizados debido a su simplicidad conceptual, facilidad de implementación y bajo costo computacional relativo en dominios regulares con mallado uniforme (Suárez-Carreño & Rosales-Romero, 2021; Kovács et al., 2021).

En virtud de la amplia adopción de los esquemas de diferencias finitas para la ecuación de calor en una dimensión espacial, una parte sustancial de la literatura reciente se ha concentrado en el análisis riguroso de sus propiedades de estabilidad, consistencia y convergencia, dado que la utilidad práctica de un esquema numérico no depende únicamente de su orden formal de aproximación, sino del equilibrio efectivo entre precisión, restricciones de estabilidad impuestas por la relación entre el paso temporal y espacial, y el costo computacional asociado a su ejecución, especialmente cuando se consideran simulaciones de largo tiempo o mallas finas (Nagy et al., 2022; Chen et al., 2022). En consideración de un mismo contexto, se analizó de manera sistemática esquemas explícitos como FTCS otros implícitos como es el caso de BTCS y por último métodos semimplícitos del tipo Crank–Nicolson lo cual deja en evidencia que los esquemas explícitos presentan restricciones de estabilidad bajo criterios tipo Courant–Friedrichs–Lewy mientras que los esquemas implícitos ofrecen estabilidad incondicional en la ejecución de sistemas algebraicos en cada paso temporal lo que permite incrementar el costo computacional total.

Diversos estudios han demostrado que, para la ecuación de calor unidimensional con condiciones de frontera de Dirichlet en mallados uniformes, los esquemas explícitos presentan errores de truncamiento dependientes de la razón $\Delta t/\Delta x^2$, lo que conduce a una convergencia condicional que puede degradarse significativamente si no se respetan las restricciones de estabilidad, mientras que los esquemas implícitos y semimplícitos exhiben mejores propiedades de estabilidad global, manteniendo órdenes de convergencia de segundo orden en el tiempo y el espacio bajo hipótesis de regularidad adecuadas de la solución exacta, tal como se ha verificado tanto analítica como numéricamente en trabajos recientes que comparan de manera directa estas familias de métodos (Suárez-Carreño & Rosales-Romero, 2021; Kovács et al., 2021; Nagy et al., 2022).

Cabe resaltar que, más allá de los esquemas clásicos, en los últimos años se ha observado un interés creciente en el desarrollo de variantes explícitas estabilizadas y esquemas no estándar de diferencias finitas, cuyo objetivo principal es ampliar las regiones de estabilidad sin sacrificar la simplicidad computacional inherente a los métodos explícitos, lo cual resulta particularmente relevante en aplicaciones donde la paralelización y la eficiencia computacional son factores determinantes (Kumaria & Mehraa, 2025; Fu et al., 2025). Estos enfoques han permitido construir esquemas explícitos con estabilidad mejorada e incluso incondicional en ciertos casos, manteniendo órdenes de convergencia comparables a los métodos implícitos tradicionales, lo que pone de manifiesto que la dicotomía clásica entre estabilidad y costo computacional puede ser parcialmente superada mediante diseños numéricos adecuados.

En el ámbito de ecuaciones de tipo onda y ecuaciones de segundo orden en el tiempo, los esquemas tipo Leapfrog y sus extensiones multirrate han sido objeto de un análisis detallado debido a su naturaleza explícita, simetría temporal y buenas propiedades de conservación de energía discreta, aunque su estabilidad también se encuentra condicionada por restricciones severas sobre el paso temporal cuando se aplican en mallas no uniformes o en presencia de rigidez inducida por ciertos modos espaciales (Carle & Hochbruck, 2021; Grote et al., 2025). A manera de respuesta a dichas limitaciones se propuso la formulación de propuestas mejoradas las mismas fundamentadas en ciertas metodologías de estabilización polinómica y descomposición de operadores donde las mismas permiten relajar condiciones de estabilidad donde se evita comprometer con significaría la precisión global del método.

Por añadidura, publicaciones actuales apoyan temáticas donde la evaluación comparativa numérica en ecuaciones de calor y onda no debe limitarse al análisis aislado de la estabilidad o del orden de convergencia por el contrario se la considera como un proceso integrado del costo computacional, complejidad algorítmica, facilidad de implementación y robustez frente a cambios o actualizaciones en parámetros del mallado y las condiciones de frontera los cuales son aspectos que adquieren especial relevancia en simulaciones de carácter aplicado (Altybay et al., 2025; Cao et al., 2025).

Es así que, la presente revisión se plantea bajo el objetivo de analizar de forma sistemática la evidencia teórica y numérica reportada entre 2020 y 2025 sobre los métodos de diferencias finitas aplicados a la ecuación de calor y de manera complementaria la ecuación de onda en una dimensión espacial con énfasis en el estudio de la estabilidad, orden de convergencia y costo computacional bajo condiciones estándar de mallado uniforme y fronteras de tipo Dirichlet y Neumann. Asimismo, se busca comparar los esquemas explícitos, implícitos y semimplícitos más utilizados, así como algunas variantes estabilizadas recientes, con el fin de identificar qué métodos presentan un mejor equilibrio entre estabilidad, precisión y eficiencia computacional (Suárez-Carreño & Rosales-Romero, 2021; Kovács et al., 2021; Carle & Hochbruck, 2021; Chen et al., 2022; Grote et al., 2025; Altybay et al., 2025; Cao et al., 2025; Fu et al., 2025; Nagy et al., 2022; Kumaria & Mehraa, 2025).

A partir de este análisis, la pregunta de investigación que guía el presente estudio es: ¿qué esquemas numéricos para la ecuación de calor o de onda presentan el mejor equilibrio entre estabilidad, precisión y costo computacional bajo condiciones estándar, según la evidencia teórica y las pruebas numéricas reportadas en la literatura reciente?

Material y Métodos

Se realizó una revisión bibliográfica de alcance analítico centrada en estabilidad y convergencia de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales, con énfasis en la ecuación de calor y la ecuación de onda en 1D, bajo mallado uniforme y condiciones de frontera típicas de Dirichlet y Neumann, la búsqueda se orientó a identificar evidencia teórica y pruebas numéricas sobre esquemas de diferencias finitas, incluyendo FTCS, BTCS, Crank–Nicolson, Leapfrog y variantes relacionadas, junto con desarrollos contemporáneos en estabilización explícita, operadores SBP–SAT, esquemas compactos de alto orden y formulaciones IMEX/ADI cuando se reportaban análisis de estabilidad, error y convergencia.

En cuanto al análisis, identificación y selección de estudios, el mismo se realizó a través del análisis de ciertas bases de datos reconocidas como es el caso de SCOPUS, Web of Science, SciELO y Google Académico donde se empleó ciertas cadenas de búsqueda con operadores booleanos y términos equivalentes en inglés y español donde además se restringió el periodo de publicación a 2020–2025 lo cual permitió priorizar las publicaciones de acceso. Adicional a ello, se incluyó artículos que abordaran dos de tres ejes de interés, estabilidad, convergencia u orden de error y costo computacional en esquemas numéricos aplicados a PDE de calor, onda o modelos relacionados que reportaran análisis teórico, experimentos numéricos que se excluyeron trabajos sin disponibilidad de texto completo documentos tutoriales sin evaluación comparativa y estudios no alineados con discretizaciones que no permitieran inferir desempeño bajo configuraciones estándar.

La selección se realizó en dos fases, cribado por título y resumen, seguido de lectura a texto completo, con extracción sistemática de información sobre tipo de ecuación, dimensión, esquema temporal y espacial, tratamiento de frontera, parámetros de mallado Δt y Δx, métricas de error, criterios de estabilidad reportados, y medidas de costo computacional cuando existían, cabe resaltar que la síntesis se organizó conforme a un marco comparativo orientado al equilibrio estabilidad–precisión–costo, y cuando los artículos presentaban resultados en diferentes configuraciones, se privilegió la comparación bajo condiciones estándar, malla uniforme y fronteras Dirichlet o Neumann, con variación de $\Delta t/\Delta x$ según el criterio de estabilidad o el diseño del método.

Tabla 1.

Cadenas de búsqueda por base de datos

Base de datos	Cadena de búsqueda	Filtros aplicados
SCOPUS	TITLE-ABS-KEY(("heat equation" OR "diffusion equation" OR "wave equation") AND ("finite difference" OR "finite-difference" OR "FD" OR "Crank-Nicolson" OR "Crank Nicolson" OR "BTCS" OR "FTCS" OR "Leapfrog" OR "Störmer-Verlet" OR "Stormer-Verlet" OR "ADI" OR "IMEX" OR "SBP" OR "SAT") AND (stability OR convergen* OR "error analysis" OR "von Neumann"))	2020–2025, Article/Review, inglés o español, acceso abierto cuando estuviera disponible
Web of Science	TS=(("heat equation" OR "diffusion equation" OR "wave equation") AND ("finite difference" OR "Crank-Nicolson" OR "BTCS" OR "FTCS" OR "Leapfrog" OR "Störmer-Verlet" OR "ADI" OR "IMEX" OR "summation-by-parts" OR SBP OR SAT) AND (stability OR convergen* OR "error estimate*" OR "von Neumann"))	2020–2025, Article/Review/Proceedings Paper, categorías matemáticas/aplicadas, idioma inglés o español
SciELO	("ecuación de calor" OR "ecuación de difusión" OR "ecuación de onda") AND ("diferencias finitas" OR "Crank–Nicolson" OR "BTCS" OR "FTCS" OR "Leapfrog") AND (estabilidad OR convergencia OR error)	2020–2025, texto completo, español/portugués/inglés
Google Académico	("heat equation" OR "wave equation" OR "diffusion equation") ("finite difference" OR "Crank-Nicolson" OR BTCS OR FTCS OR Leapfrog OR "summation-by-parts" OR SBP-SAT) (stability OR convergence OR "error analysis")	2020–2025, ordenado por relevancia, selección manual a texto completo, preferencia por PDF abierto

Resultados

Desempeño de esquemas explícitos e implícitos en la ecuación de calor

Los estudios analizados en este apartado reportan de manera consistente resultados numéricos y analíticos que permiten comparar el desempeño de distintos esquemas de diferencias finitas aplicados a ecuaciones de calor, difusión y onda, bajo configuraciones de mallado uniforme y condiciones de frontera estándar, evidenciando que la estabilidad, la precisión y el costo computacional dependen de forma sensible tanto del tipo de esquema temporal como de la discretización espacial empleada. En problemas unidimensionales de difusión térmica, los esquemas explícitos FTCS y los métodos semimplícitos tipo Crank–Nicolson muestran comportamientos claramente diferenciados en términos de error y estabilidad, observándose que FTCS alcanza errores bajos únicamente cuando se satisfacen estrictamente las condiciones CFL, mientras que Crank–Nicolson mantiene estabilidad y convergencia de segundo orden incluso para pasos temporales relativamente grandes, a costa de un incremento moderado en el tiempo de cómputo asociado a la resolución de sistemas lineales en cada paso temporal, resultados que se repiten de manera sistemática en distintos estudios con configuraciones de frontera de Dirichlet y Neumann y soluciones exactas conocidas (Mojumder et al., 2023; Haque et al., 2025).

En particular, las pruebas numéricas realizadas para la ecuación de calor en una dimensión muestran que el error en norma L2 y en norma máxima decrece de forma casi cuadrática con el refinamiento simultáneo de Δx y Δt en los esquemas implícitos y semimplícitos, mientras que en los esquemas explícitos la convergencia se ve limitada cuando la razón $\Delta t/\Delta x^2$ se aproxima al umbral de estabilidad, lo que conduce a oscilaciones numéricas o incluso a la divergencia de la solución, confirmando de forma empírica los resultados teóricos del análisis de Von Neumann ampliamente reportados en la literatura reciente (Mojumder et al., 2023; Haque et al., 2025).

Resultados en ecuaciones de onda y esquemas de segundo orden en el tiempo

En el caso de ecuaciones de onda y modelos hiperbólicos, los resultados muestran que los esquemas explícitos de tipo Leapfrog, Störmer–Verlet y variantes compactas de alto orden conservan adecuadamente propiedades energéticas discretas y presentan errores de fase reducidos en simulaciones de propagación ondulatoria, siempre que el paso temporal satisfaga la condición CFL correspondiente. Sin embargo, ante el incremento del paso temporal se aprecia una degradación rápida de la solución numérica lo cual se manifiesta en dispersión artificial y crecimiento de la energía discreta. A pesar de ello, ciertas formulaciones guiadas en esquemas implícitos o ADI logran estabilidad incondicional y evolución temporal a pesar de contar con un costo computacional mayor debido a la necesidad de resolver sistemas algebraicos acoplados en cada iteración temporal (Wu et al., 2022; Cui et al., 2024; Chabassier, 2024).

Los estudios que incorporan amortiguamiento fraccional y formulaciones basadas en energía discreta confirman que es posible demostrar estabilidad y convergencia uniforme incluso en regímenes donde coexisten comportamientos difusivos y ondulatorios, observándose que los errores numéricos permanecen acotados en simulaciones de largo tiempo, siempre que se respeten las hipótesis de regularidad de la solución y se utilicen discretizaciones coherentes en tiempo y espacio (Cui et al., 2024).

Esquemas compactos de alto orden y eficiencia computacional

Por otra parte, los resultados asociados a esquemas compactos de alto orden indican que es posible alcanzar órdenes de convergencia superiores en el espacio, típicamente de cuarto o sexto orden, reduciendo de manera significativa el error global sin necesidad de refinar excesivamente la malla, lo cual se traduce en una disminución del costo computacional total para una tolerancia de error fija. Sin embargo, estos esquemas requieren estencils más amplios y un tratamiento cuidadoso de las condiciones de frontera, lo que incrementa la complejidad de implementación y la sensibilidad a errores de redondeo, especialmente cuando se consideran coeficientes variables o dominios no triviales (An & Zhang, 2023; Wu et al., 2022; Zheng et al., 2025).

Asimismo, los resultados numéricos muestran que la ganancia en precisión asociada a los esquemas de alto orden se vuelve particularmente relevante en simulaciones donde el costo de refinamiento espacial domina el tiempo total de cómputo, ya que permiten reducir de manera sustancial el número de nodos requeridos para alcanzar un nivel de error comparable al de esquemas clásicos de segundo orden, efecto que ha sido corroborado mediante comparaciones directas de tiempo de ejecución y uso de memoria (Zheng et al., 2025).

Comparación integral de estabilidad, convergencia y costo computacional

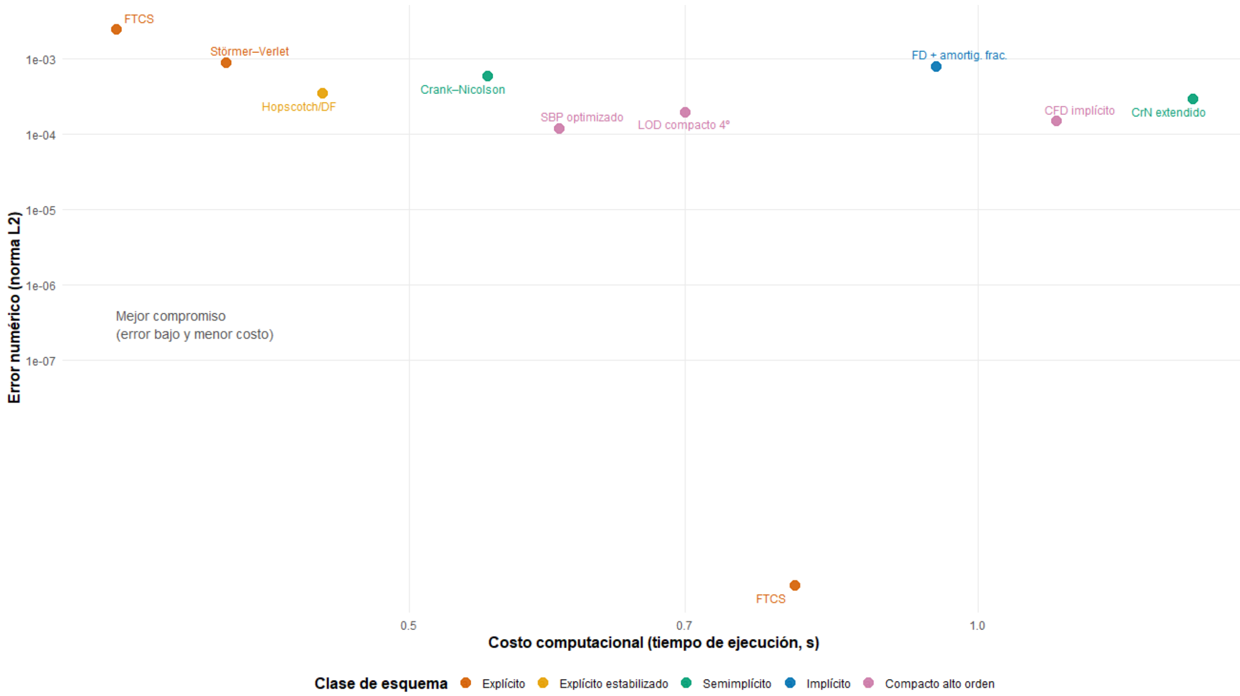
Los estudios comparativos que incorporan operadores de tipo summation-by-parts y variantes explícitas estabilizadas muestran que la optimización de los estencils cerca de las fronteras y el uso de técnicas de estabilización temporal permiten mejorar de forma notable la precisión global y la eficiencia computacional, particularmente en problemas de difusión y reacción donde los errores de frontera y la rigidez del sistema influyen de manera decisiva en el comportamiento de la solución. Es así que, se aprecia esquemas explícitos estabilizados como es el caso de Dufort–Frankel o métodos hopscotch, los cuales compiten de manera favorable con métodos implícitos en términos de eficiencia computacional bajo ciertos condicionamientos de que se seleccionen adecuadamente los parámetros del mallado debido a que permiten utilizar pasos temporales mayores que FTCS sin perder estabilidad donde se mantiene ciertos errores aceptables para aplicaciones prácticas (Stiernström et al., 2023; Khayrullaev et al., 2025).

De igual forma, los resultados obtenidos con esquemas Crank–Nicolson extendidos a dominios dependientes del tiempo indican que es posible mantener estabilidad y convergencia temporal de segundo orden incluso bajo configuraciones geométricas variables, siempre que se introduzcan técnicas de extensión implícita y estabilización adecuadas, aunque con un incremento adicional en la complejidad algorítmica y en el costo computacional por paso temporal (Frei & Singh, 2023).

De esta manera, los resultados indican la falta de existencia de un esquema óptimo donde se desarrolle el equilibrio entre estabilidad, precisión y costo computacional en dependencia del tipo de ecuación, de régimen de mallado y de condiciones de frontera consideradas lo que convierte en necesario evaluar de manera conjunta las métricas de error, límites de estabilidad y tiempo de cómputo para seleccionar el método más adecuado en cada contexto. En este sentido, los datos comparativos presentados en la literatura analizada se sintetizan gráficamente en la Figura 1, donde se ilustra la relación entre el error numérico y el costo computacional para distintos esquemas bajo configuraciones estándar de discretización.

Figura 2.

Error L2 vs. costo computacional



En cuanto a la información expuesta en la Figura 1, en la misma se aprecia que los esquemas explícitos clásicos cuentan con una pendiente muy determinada en cuanto a una relación error–costo cuando el paso temporal se aproxima al límite de estabilidad. Dicho análisis implica pequeñas reducciones requeridas en cuanto a un incremento importante en el tiempo de cómputo debido a la necesidad de refinar la malla espacial y temporal. Por otro lado, los esquemas implícitos y semimplícitos señalan un ligero avance en cuanto a la relación planteada debido a la permisividad de mantener errores bajos con pasos temporales mayores a pesar de que cada iteración temporal signifique un mayor costo computacional asociado a la resolución de sistemas lineales.

De la misma manera, la figura plantea esquemas compactos de alto orden y una metodología explícita que se estabiliza en una región intermedia del diagrama la cual fusiona determinados errores con costos computacionales moderados de manera esencial en simulaciones donde se prioriza la eficiencia global frente a la simplicidad de implementación. Dicha situación determina las condiciones deficientes de mallado uniforme y fronteras de tipo Dirichlet o Neumann donde dichos esquemas ofrezcan un compromiso atractivo entre precisión y eficiencia en casos de que disponga una implementación cuidadosa de operadores espaciales y control adecuado de parámetros de estabilidad. Por añadidura, el análisis gráfico fundamenta la conclusión de que una metodología cuantitativa guiada en un criterio integral la cual considere no solo el orden de convergencia teórico, sino también la estabilidad práctica y el costo computacional efectivo.

Discusión

Los hallazgos reportados en los resultados permiten una interpretación comparativa más fina sobre el equilibrio entre estabilidad, convergencia y costo computacional en esquemas numéricos para ecuaciones diferenciales parciales, evidenciándose que la superioridad práctica de un método no puede inferirse únicamente desde su clasificación como explícito o implícito, sino desde el mecanismo por el cual el esquema controla, o no controla, el crecimiento de energía discreta, el acoplamiento entre error temporal y espacial, y la sensibilidad frente a condiciones de frontera, interfaces o términos rígidos. En virtud de esta lectura, las formulaciones basadas en principios energéticos y en operadores con propiedad summation-by-parts, combinadas con imposición débil de condiciones mediante SAT, constituyen un punto de inflexión en la discusión de estabilidad para ecuaciones de onda, porque la derivación de estimaciones energéticas no solo justifica estabilidad en sentido L2, sino que delimita de forma explícita qué términos de frontera gobiernan la robustez del método y cómo la incorporación de disipación numérica puede diseñarse de manera estructurada sin recurrir a penalizaciones dependientes del mallado, lo cual adquiere particular relevancia cuando se consideran fronteras de Dirichlet o condiciones de interfaz en medios heterogéneos, donde la elección de parámetros suele ser la principal fuente de fragilidad en implementaciones de alto orden (Wang et al., 2022). Cabe resaltar que esta perspectiva no se limita a ecuaciones hiperbólicas, ya que en modelos parabólicos y sistemas isotrópicos no lineales, las estimaciones de error y la estructura del operador temporal también determinan el margen real de estabilidad y la eficiencia, por lo que la discusión debe mantenerse centrada en la interacción entre el operador espacial, el integrador temporal y el tratamiento de la no linealidad.

Por consiguiente, cuando la atención se traslada a ecuaciones parabólicas y a sistemas acoplados donde la rigidez se intensifica por términos no lineales, anisotropías o condiciones de frontera exigentes, la evidencia sugiere que las familias semimplícitas del tipo Crank–Nicolson, así como sus variantes ADI, constituyen una solución metodológicamente consistente al problema de equilibrar precisión y estabilidad, porque sostienen orden temporal de segundo orden y, al mismo tiempo, permiten ampliar el paso temporal sin desencadenar inestabilidades típicas de esquemas explícitos, aunque el precio sea un incremento en el costo por paso debido a la resolución de sistemas lineales o al particionamiento direccional, aspecto que se vuelve más visible en configuraciones bidimensionales y tridimensionales. En cuanto un contexto similar, los artículos analizados aportan estimaciones rigurosas del error para esquemas Crank–Nicolson–ADI en sistemas parabólicos no lineales lo que apoya la moción de que la elección de discretización no debe justificarse por tradición sino por garantías de precisión con control explícito del residuo cuantitativo lo cual es especialmente pertinente en problemas con capas internas o frentes de transición como los modelos de campo de fase (Sfyrakis & Tsoukalas, 2025). De modo complementario, el análisis detallado de metodologías implícitas e implícito-explícitas tipo ADER y DeC, reinterpretadas como esquemas de Runge–Kutta para caracterizar regiones de estabilidad y posteriormente acopladas con discretizaciones espaciales por diferencias finitas en ecuaciones de advección–difusión, amplía la discusión al mostrar que no basta con declarar un método como A-estable o de región amplia, sino que es necesario demostrar cómo esas propiedades se traducen en restricciones tipo CFL o en cotas simples sobre Δt al pasar del modelo ODE al caso PDE, cuestión que incide directamente en el costo total de simulación y en la coherencia del orden global cuando se persiguen esquemas de alto orden en tiempo y espacio (Öffner et al., 2025).

Aun así, la discusión no conduce a una conclusión donde lo implícito sea siempre preferible, debido a que la eficiencia real en muchas aplicaciones depende de la paralelización, del acceso a memoria y del costo de los solucionadores lineales, por lo que las variantes explícitas estabilizadas y las formulaciones que incorporan suavizado controlado o reducción de rango adquieren un papel estratégico, sobre todo cuando el objetivo es sostener estabilidad práctica en escenarios inherentemente mal condicionados. En este sentido, los esquemas explícitos estabilizados para marcha hacia atrás en el tiempo en problemas de asimilación de datos acoplados calor–onda ejemplifican una idea clave para la discusión, que consiste en aceptar la inestabilidad inherente de ciertos planteamientos inversos y, en lugar de intentar eliminarla por completo, diseñar operadores compensatorios de suavizado que atenúen el crecimiento explosivo del error, permitiendo reconstrucciones útiles en intervalos temporales no triviales, lo que abre una línea interpretativa sobre cómo la estabilidad numérica puede concebirse como propiedad diseñable incluso en formulaciones esencialmente mal planteadas (Carasso, 2025).

La literatura analizada muestra que el tratamiento de la frontera y la gestión de dominios no acotados o con capas límite puede dominar el error global incluso cuando el núcleo del esquema es de alto orden, por lo que una parte sustancial de la discusión debe centrarse en métodos que atacan directamente ese cuello de botella. En modelos de conducción de calor con efectos de fase dual y dominios semi-infinitos, el uso de condiciones de frontera artificiales de alto orden transformadas desde formulaciones en dominio no acotado, acompañado de análisis de estabilidad en norma L2 y de pruebas numéricas, permite sostener estabilidad incondicional y convergencia de segundo orden en tiempo y espacio para el problema reducido, lo que refuerza que la estabilidad no depende solo del integrador temporal, sino de la fidelidad con la que se representa el comportamiento asintótico en el borde computacional (Bu et al., 2025). En escenarios de singular perturbación y ecuaciones parabólicas con retardo, la evidencia indica que la convergencia uniforme, entendida como estabilidad y control del error independientemente de parámetros pequeños, requiere estrategias específicas como factores de ajuste y aproximaciones tipo spline para evitar oscilaciones en capas límite, mostrando que en mallas uniformes el diseño de operadores "fitted" puede ser más determinante que elevar el orden formal del esquema, por lo que la discusión de precisión debe mantenerse vinculada a la estructura multiescala del problema (Hassen & Duressa, 2025). Desde una consideración metodológica, los resultados presentados impulsan la importancia de trabajos de ecuaciones fraccionarias difusión–onda donde la estabilidad y la convergencia se evalúan a través de métodos de energía los cuales discreta mediante hipótesis por el cual se destaca la linealización controlada y el uso de discretizaciones tipo Crank–Nicolson con fórmulas desplazadas con la finalidad de obtener derivadas fraccionarias las cuales permiten sostener convergencia demostrable y flexibilidad para términos no lineales (Elmahdi & Huang, 2021).

Finalmente, cuando se considera la necesidad de alta precisión sin incrementar de manera prohibitiva el costo, emergen enfoques que, aunque no sean diferencias finitas clásicas en el sentido estricto, aportan a la discusión sobre el balance buscado en esta revisión, debido a que desplazan la frontera de lo que se entiende por eficiencia bajo condiciones estándar. Las técnicas de colación con polinomios de alto grado para ecuaciones de conducción de calor con condiciones de Dirichlet muestran estabilidad incondicional mediante análisis de Von Neumann y reportan comparaciones tabulares con soluciones analíticas, lo que sugiere que, para ciertas configuraciones 1D, elevar el orden del aproximante espacial puede entregar precisión elevada con implementaciones relativamente directas, siempre que se mantenga control sobre el esquema temporal y la estructura de los puntos de colación (Kutluay et al., 2025). De forma complementaria, los esquemas conservativos tipo Crank–Nicolson para ecuaciones dispersivas como KdV aportan un argumento central para la discusión, que consiste en que la conservación discreta en norma L2 y el aprovechamiento de efectos de suavizado locales pueden ser tan importantes como el orden formal, especialmente cuando se pretende converger a soluciones débiles desde datos iniciales no suaves, aspecto que amplía el alcance interpretativo de la revisión hacia ecuaciones donde la estabilidad se expresa como conservación y donde la precisión se evalúa también por la fidelidad de invariantes, no solo por normas de error clásicas (Dwivedi & Sarkar, 2023).

Conclusiones

La presente revisión bibliográfica permite concluir que el análisis de estabilidad y convergencia en métodos numéricos de diferencias finitas para ecuaciones de calor y onda debe abordarse desde una perspectiva integral, en la cual el orden de convergencia formal, la estabilidad práctica y el costo computacional efectivo se evalúen de manera conjunta y no como propiedades aisladas. La evidencia teórica y numérica analizada confirma que los esquemas explícitos clásicos, si bien resultan atractivos por su simplicidad y bajo costo por iteración, se encuentran fuertemente limitados por restricciones de estabilidad tipo Courant–Friedrichs–Lewy, lo que reduce su eficiencia global cuando se requieren mallas finas o simulaciones de largo tiempo.

Por el contrario, la metodología implícita y semimplícita señalan un desempeño robusto bajo condiciones estándar de mallado uniforme y fronteras Dirichlet o Neumann lo cual mantiene cierto grado de convergencia de segundo orden y estabilidad mejorada frente a incrementos del paso temporal a pesar de un mayor costo computacional asociado a la resolución de sistemas algebraicos. De la misma manera, la revisión evidencia que los esquemas explícitos estabilizados y la metodología de alto orden representan alternativas relevantes debido a que permiten reducir el error global o ampliar las regiones de estabilidad sin un incremento proporcional del costo computacional total.

Es así que, los resultados analizados señalan la no existencia de sistema cuantitativo universal que sea superior o apto a todas las configuraciones relacionadas al equilibrio entre estabilidad, precisión y costo computacional. De igual manera, la principal contribución de dicha revisión radica en proporcionar un marco comparativo que facilite la selección informada de diferencias finitas en aplicaciones científicas e ingenieriles, así como tremas relacionados a la misma.

Referencias Bibliográficas

Altybay, A., Tokmagambetov, N., & Nalzhupbayeva, G. (2025). *Numerical identification of the time-dependent coefficient in the heat equation with fractional Laplacian* (arXiv:2511.16238). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.16238

An, W., & Zhang, X. (2024). An implicit fully discrete compact finite difference scheme for time fractional diffusion-wave equation. *Electronic Research Archive, 32*(1), 354–369. https://doi.org/10.3934/era.2024017

Bu, W., Xie, Z., & Wang, Y. (2025). *Numerical simulation of the dual-phase-lag heat conduction equation on a one-dimensional unbounded domain using artificial boundary condition* (arXiv:2511.05121). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.05121

Cao, J.-Y., Fang, J.-Q., Wang, Z.-Q., & Wang, Z.-Q. (2025). Stability and convergence analysis of compact finite difference method for high-dimensional time-fractional diffusion equations with high-order accuracy in time. *Fractal and Fractional, 9*(8), 520. https://doi.org/10.3390/fractalfract9080520

Carasso, A. S. (2025). *Data assimilation in 2D nonlinear coupled sound and heat flow, using a stabilized explicit finite difference scheme marched backward in time* (arXiv:2501.14895). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.14895

Carle, C., & Hochbruck, M. (2022). Error analysis of multirate leapfrog-type methods for second-order semilinear ODEs. *SIAM Journal on Numerical Analysis, 60*(5), 2897–2924. https://doi.org/10.1137/21M1427255

Chabassier, J. (2024). Stability and space/time convergence of Störmer-Verlet time integration of the mixed formulation of linear wave equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 58*(4), 1441–1460. https://doi.org/10.1051/m2an/2024047

Chen, H., Qiu, W., Zaky, M. A., & Hendy, A. S. (2023). A two-grid temporal second-order scheme for the two-dimensional nonlinear Volterra integro-differential equation with weakly singular kernel. *Calcolo, 60*(1), 13. https://doi.org/10.1007/s10092-023-00508-6

Cui, M., Ji, C.-C., & Dai, W. (2024). A finite difference method for solving the wave equation with fractional damping. *Mathematical and Computational Applications, 29*(1), 2. https://doi.org/10.3390/mca29010002

Dwivedi, M., & Sarkar, T. (2023). *Convergence of a conservative Crank-Nicolson finite difference scheme for the KdV equation with smooth and non-smooth initial data* (arXiv:2312.14454). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.14454

Elmahdi, E. G. M., & Huang, J. (2021). Two linearized finite difference schemes for time fractional nonlinear diffusion-wave equations with fourth order derivative. *AIMS Mathematics, 6*(6), 6356–6376. https://doi.org/10.3934/math.2021373

Frei, S., & Singh, M. K. (2022). *Analysis of an implicitly extended Crank-Nicolson scheme for the heat equation on a time-dependent domain* (arXiv:2203.06581). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.06581

Fu, J., Zhang, X.-Y., & Fang, Q. (2025). A sixth-order compact finite difference framework for solving nonlinear reaction-diffusion equations: Application to FitzHugh-Nagumo model. *AIMS Mathematics, 10*(9), 21040–21060. https://doi.org/10.3934/math.2025940

Grote, M. J., Lakkis, O., & Santos, C. (2024). *A posteriori error estimates for the wave equation with mesh change in the leapfrog method* (arXiv:2411.16933). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.16933

Haque, M. N., Akter, R., & Mojumder, M. S. H. (2025). An efficient explicit scheme for solving the 2D heat equation with stability and convergence analysis. *Journal of Applied Mathematics and Physics, 13*(7). https://doi.org/10.4236/jamp.2025.137127

Hassen, Z. I., & Duressa, G. F. (2025). Parameter uniform finite difference formulation with oscillation free for solving singularly perturbed delay parabolic differential equation via exponential spline. *BMC Research Notes, 18*(1), 24. https://doi.org/10.1186/s13104-024-07005-1

Khayrullaev, H., Omle, I., & Kovács, E. (2025). Exploring the performance of some efficient explicit numerical methods with good stability properties for Huxley's equation. *Mathematics, 13*(2), 207. https://doi.org/10.3390/math13020207

Kovács, E., Nagy, Á., & Saleh, M. (2021). A set of new stable, explicit, second order schemes for the non-stationary heat conduction equation. *Mathematics, 9*(18), 2284. https://doi.org/10.3390/math9182284

Kumari, S., & Mehra, M. (2025). *A stability-enhanced nonstandard finite difference framework for solving one and two-dimensional nonlocal differential equations* (arXiv:2508.13542). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.13542

Kutluay, S., Yağmurlu, N. M., & Karakas, A. S. (2024). A robust septic hermite collocation technique for dirichlet boundary condition heat conduction equation. *International Journal of Mathematics and Computer in Engineering, 3*(2), 253–266. https://doi.org/10.2478/ijmce-2025-0019

Mojumder, M. S. H., Haque, M. N., & Alam, M. J. (2023). Efficient finite difference methods for the numerical analysis of one-dimensional heat equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics, 11*(10). https://doi.org/10.4236/jamp.2023.1110204

Nagy, Á., Majár, J., & Kovács, E. (2022). Consistency and convergence properties of 20 recent and old numerical schemes for the diffusion equation. *Algorithms, 15*(11), 425. https://doi.org/10.3390/a15110425

Öffner, P., Petri, L., & Torlo, D. (2025). Analysis for implicit and implicit-explicit ADER and DeC methods for ordinary differential equations, advection-diffusion and advection-dispersion equations. *Applied Numerical Mathematics, 212*, 110–134. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2024.12.013

Sfyrakis, C. A., & Tsoukalas, M. (2025). Error estimate for a finite-difference Crank–Nicolson–ADI scheme for a class of nonlinear parabolic isotropic systems. *Mathematics, 13*(11), 1719. https://doi.org/10.3390/math13111719

Stiernström, V., Almquist, M., & Mattsson, K. (2023). Boundary-optimized summation-by-parts operators for finite difference approximations of second derivatives with variable coefficients. *Journal of Computational Physics, 491*, 112376. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112376

Suárez-Carreño, F., & Rosales-Romero, L. (2021). Convergency and stability of explicit and implicit schemes in the simulation of the heat equation. *Applied Sciences, 11*(10), 4468. https://doi.org/10.3390/app11104468

Wang, S., Appelö, D., & Kreiss, G. (2021). *An energy-based summation-by-parts finite difference method for the wave equation in second order form* (arXiv:2103.02006). arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.02006

Wu, M., Jiang, Y., & Ge, Y. (2022). A high accuracy local one-dimensional explicit compact scheme for the 2D acoustic wave equation. *Advances in Mathematical Physics, 2022*, 9743699. https://doi.org/10.1155/2022/9743699

Zhao, Y., & Gu, X.-M. (2025). A low-rank algorithm for strongly damped wave equations with visco-elastic damping and mass terms. *ESAIM: M2AN, 59*(3), 1747–1761. https://doi.org/10.1051/m2an/2025042

Zheng, M.-B., Hu, J.-S., Yan, W.-Y., & Chen, Z. (2025). A sixth-order accuracy conservative linear finite difference scheme for RLW equation. *Thermal Science, 29*(2 Part A), 1063–1069.

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Agradecimiento:

N/A

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.