ASCE MAGAZINE ISSN: 3073-1178

Revista ASCE Magazine, Periodicidad: Trimestral Enero - Marzo, Volumen: 5, Número: 1, Año: 2026 páginas 1212 - 1237

Doi: https://doi.org/10.70577/asce.v5i1.640

Recibido: 2025-12-30
Aceptado: 2026-01-12
Publicado: 2026-02-04

Detalles de algunos métodos para aproximar superficies discontinuas

Details of some methods for approximating discontinuous surfaces

Autores

Ramón Antonio Abancín Ospina[1]
Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática
https://orcid.org/0000-0002-2417-6671
ramon.abancin@espoch.edu.ec
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Grupo de Investigación CIDED,
Riobamba – Ecuador
Universidad Simón Bolívar (USB), Doctorado en Matemáticas
Caracas – Venezuela

Raúl Manzanilla Morillo[2]
Escuela de Ciencias Matemáticas y Tecnología Informática
https://orcid.org/0000-0002-8456-0333
rmanzanilla@yachaytech.edu.ec
Universidad de investigación de Tecnología experimental, (Yachay Tech)
San Miguel de Urcuquí – Ecuador

Cómo citar

Abancín Ospina, R. A., & Manzanilla Morillo, R. (2026). Detalles de algunos métodos para aproximar superficies discontinuas. *ASCE MAGAZINE*, *5*(1), 1212–1237.

Resumen

La aproximación de funciones (superficies) que presentan fuertes (o grandes) variaciones o varían rápidamente (funciones no regulares) a partir de un conjunto de datos conocidos (dispersos y/o regularmente distribuidos) de tipo Lagrange, $(\xi_j, f(\xi_j))_{j=1}^{N}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, con $N \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$, para una función f (aproximada) definida explícitamente por $z = f(x,y)$, es un problema concreto que posee un importante número de aplicaciones, tales como: aproximación de frentes marítimos a partir de datos batimétricos; aproximación de superficies con fallas en el campo de las Geociencias; entre otras. Dentro de este contexto, el propósito del estudio fue revisar y presentar los detalles, en el sentido de: estructura, requisitos, procesos, funcionalidad y resultados; de algunos de los métodos de aproximación de funciones no regulares, con hincapié en aquellos útiles para Superficies Discontinuas (SD) las cuales son originadas por la variación rápida en el conjunto de datos. En este sentido, la investigación fue abordada bajo un enfoque cualitativo no iterativo, de tipo descriptivo, con diseño de investigación documental; fundamentada en documentos (libros y artículos) de carácter científicos relacionados con los métodos de aproximación de superficies explícitas a partir de un conjunto de datos que presentan fuertes variaciones. Como resultados, se obtuvo un panorama de los procesos generales utilizados en la aplicación de algunos de los métodos de aproximación más notables para superficies discontinuas. En conclusión, conocer los detalles de ciertos métodos estándar para aproximar superficies discontinuas permite elegir el enfoque más adecuado, ya sea aplicando los existentes o diseñando metodologías propias para optimizar los resultados esperados.

Palabras clave: Funciones no regulares, Aproximación, Métodos de aproximación, Datos de variación rápida, Aproximación de superficies discontinuas.

Abstract

The approximation of functions (surfaces) that present strong (or large) variations or vary rapidly (non-regular functions) from a set of data known (sparse and/or regularly distributed) of Lagrange-type, $(\xi_j, f(\xi_j))_{j=1}^{N}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, with $N \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$, for an explicitly defined function f (approximate) for $z = f(x,y)$, is a specific problem that has a significant number of applications, such as: approximation of maritime fronts from bathymetric data; approximation of surfaces with faults in the field of Geosciences; among other. Within this context, the purpose of the study is to review and present the details, in the sense of: structure, requirements, processes, functionality and results; of some of the approximation methods of non-regular functions, with emphasis on those useful for discontinuous surfaces which are caused by rapid variation in the data set. In this sense, the research was approached under a non-iterative qualitative approach, of a descriptive type, with a documentary research design; based on documents (books and articles) of a scientific nature related to the approximation methods of explicit surfaces from a set of data that present strong variations. As a result, an overview of the general processes used in the application of some of the most notable approximation methods for discontinuous surfaces was obtained. In conclusion, knowing the details of certain standard methods for approximating discontinuous surfaces allows you to choose the most appropriate approach, either by applying existing ones or by designing your own methodologies to optimize the expected results.

Keywords: Non-regular functions, Approximation, Approximation methods, Rapidly varying data, Approximation of discontinuous surfaces.

Introducción

En muchas de las aplicaciones en ciertos campos de la matemática y áreas afines, se encuentran con el problema de aproximación de funciones (superficies) a partir de un conjunto de datos (o muestras) conocidos de tipo Lagrange, a saber, $(\xi_j, f(\xi_j))_{j=1}^{N}$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, con $N \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$, regularmente distribuidos o dispersos que presentan fuertes o grandes variaciones (o varían rápidamente), donde f es una función (llamada aproximada) definida explícitamente por $z = f(x,y)$, por lo menos, en un conjunto de puntos (o nodos), $X^N = \{\xi_j \in \mathbb{R}^2 : j = 1,2,\dots,N\}$, en un dominio Ω no vacío, abierto, convexo y acotado de dos dimensiones. Específicamente, el problema de construcción de una función s (respectivamente, curva y/o superficie) regular (que se llamará, aproximante) se realiza a partir de un conjunto de datos, aparece en muchos problemas de interés para la geología, geofísica, oceanografía, las ciencias e ingenierías, entre otras áreas y disciplinas; en los cuales, es común tratar con un conjunto de datos que muestran estructuras complicadas (*e.g.*, como son las fallas), cristalizadas por la presencia de fuertes o grandes variaciones.

Esto ocurre como aplicación en problemas de construcción y/o aproximación de: frentes marítimos a partir de datos batimétricos; superficies con fallas en el campo de las Geociencias, entre otras. Por ejemplo, cuando se describe la topografía de las superficies del fondo marino (Fosa de Tonga, Fosa de Japón, Fosa de Kermadec, Fosa de las Marianas, entre otras), a partir de datos de batimetría (Gout & Ramière, 2003); asimismo, la obtención de la topografía necesaria para el pre-procesamiento de datos que se utilizan en la formulación de modelos de derrame de lava; presencia de estructuras geológicas con fallas; además de, cordilleras, volcanes, islas o la forma de entidades geológicas; así como también, cuando se trata de la caracterización y modelado de yacimientos en la industria del petróleo, vulcanología, entre otras, (Gout *et al.*, 2008). En todas estas circunstancias, muchas veces se requiere de la construcción de superficies regulares que aproximen las superficies no regulares observadas, desde el conocimiento de un conjunto de datos conocidos para estas últimas. Aquí, las funciones no regulares son aquellas que presentan fuertes o grandes variaciones derivadas del conjunto de datos.

En este sentido, lograr una representación regular (o suave) lo más exacta posible de la superficie irregular a través de un proceso de adaptación de datos precisos para su descripción, es un problema de gran importancia para las áreas aplicadas, especialmente cuando se necesita describir la topografía de modelos con irregularidad superior, (Gout *et al.*, 2008). Para cuya resolución se han usado las ideas de aproximación de funciones (curvas y/o superficies) a partir de datos que presentas fuertes y rápidas variaciones.

Dentro de este contexto, para aproximar funciones (curvas y/o superficies) a partir de un conjunto de datos conocidos, funcionan bien para datos regulares (aquí, serán entendidos como datos que no presentan fuertes ni rápidas variaciones), donde se arrojan excelentes resultados. Pero, en la presencia de datos no regulares (esto es, datos que presentan grandes o variaciones rápidas) su eficacia no es tan buena. Específicamente, el principal problema que se presenta con las aproximaciones de funciones no regulares, gira entorno a las fuertes y rápidas variaciones derivadas del conjunto de datos, puesto que la utilización de los métodos tradicionales, en términos generales, originan inestabilidad por exceso e insuficiencia, o simplemente, oscilaciones indeseables cerca de las pendientes pronunciadas, conocidas como el fenómeno de Gibss (véase, por ejemplo, Gibbs, 1899; Carslaw, 1930; Gottlieb & Shu, 1997, Boyd, 2001; Strang & Nguyen, 1996), que según Gout *et al*. (2008) puede dificultar y obstaculizar de forma local e incluso a nivel global la aproximación de la función en cuestión.

Al respecto, en la literatura científica se encuentran trabajos e investigaciones que estudian la aproximación de funciones que presentan fuertes y rápidas variaciones en el conjunto de datos. Entre algunos métodos clásicos para aproximación de superficies discontinuas (no regulares), se pueden mencionar: Método de Elementos Finitos Enriquecidos (Belytschko *et al*., 1999), Método de Elementos Finitos con Interfases Fortalecidas (Ortiz & Pandolfi, 1999), Métodos de Mallado Independiente (Belytschko *et al*., 1994), Método de Descomposición de Dominio con Condiciones de Transmisión Discontinuas (Lions, 1990; Alart & Curnier, 1991) y Esquemas de Volúmenes Finitos para Captura de Discontinuidades (Harten *et al*., 1987; Liu *et al*., 1994). Estos métodos representan enfoques fundacionales para tratar discontinuidades en simulaciones numéricas, abarcando fracturas, interfaces materiales y ondas de choque.

Donde concretamente, se proponen varias técnicas específicas que, por lo general, son modificaciones o adaptaciones de las técnicas o algoritmos de los métodos para la aproximación de funciones regulares, que buscan la construcción de funciones regulares aproximantes a partir de un conjunto de datos conocidos. Lo que resulta en versiones análogas que requieren para su aplicación tomar en cuenta el conjunto donde se producen las rápidas o grandes variaciones, conocido como el conjunto de discontinuidad, el cual, frecuentemente, es desconocido. Entonces, específicamente, en la presencia de fuertes y rápidas variaciones en el conjunto de datos, se intenta un ajuste con el uso de métodos clásicos de aproximación de funciones regulares, que disciernen en el trato del conjunto de datos regulares con el de datos no regulares.

Dentro de estos trabajos mencionados, los métodos de aproximación propuestos contemplan la idea central del proceso de aproximación de funciones no regulares, la cual puede ser cristalizada a partir de los siguientes dos pasos: P_1) Paso de detección de discontinuidad: localizar el conjunto de discontinuidad a partir de un conjunto de datos dados; y P_2) Paso de aproximación: aproximar la función observada sobre el dominio de los datos incluyendo el conjunto de discontinuidad.

No obstante, a pesar que el problema de aproximación de funciones (curvas y/o superficies) no regulares ha sido estudiado bajo determinadas condiciones, tanto para funciones explicitas como para funciones paramétricas, todavía es un tema novedoso e interesante que se encuentra frecuentemente en varios campos de aplicaciones científicas, como pueden ser, entre muchos, la modelación en geología o las técnicas de reconstrucción de imágenes. Además, debido a la presencia de fuertes y rápidas variaciones en el conjunto de datos conocidos, cuando se intenta un ajuste utilizando métodos de aproximación convencionales, es posible obtener buenos resultados en el caso de ajuste de curvas, pero son menos precisos los resultados en el caso de ajustes de superficies, debido a la posibilidad que se produzca el fenómeno de Gibss. Es decir, la aparición de algunos meneos u oscilaciones no deseadas que a menudo se generan alrededor de algunos datos no regulares, cuyos valores pueden cambiar rápidamente en comparación con datos regulares vecinos. Así, incluso si estos métodos clásicos dan buenos resultados en el caso de ajuste de curvas, en el caso de aproximación de superficies, los resultados pueden ser mejorados.

Aunado a esto, es posible estudiar lo satisfactorio de los resultados obtenidos en cuanto a la calidad de la aproximación, la dificultad de la implementación y el tiempo de ejecución, entre otros. También, resulta conveniente considerar que los pasos: P_1) Paso de detección de discontinuidad y P_2) Paso de aproximación; involucrados en el problema de aproximación de funciones no regulares forman parte del mismo problema, debido a que muchos de los métodos existentes sólo consideran la segunda parte del problema de aproximación mencionado, donde se solicita como requisito para su implementación información sobre las grandes variaciones en el conjunto de datos. Además, resulta conveniente considerar que el paso de detección y el de aproximación forman parte del mismo problema, pues, no siempre son compatibles los resultados de las investigaciones que los consideran por separados (Abancín *et al*., 2024). Es decir, cuando se tratan de modo independiente, no siempre resulta fácil adaptar y acoplar los resultados del primero de ellos con las condiciones de entrada del segundo.

Por todo lo antes expuesto, el propósito del presente artículo es indagar, recoger, analizar y organizar información, sin pretender ser exhaustivo, sobre algunos de los elementos representativos involucrados en la aproximación de funciones (curvas y/o superficies) no regulares. Esto con intenciones que sirvan de referencia para, en un primer momento, introducir los aspectos elementales que contemplan los métodos de aproximación de tales funciones, como son: los requerimientos, procesamiento, funcionalidad y resultados, etc. A su vez, que se describe en forma sencilla para los lectores noveles que se inician en la temática abordada, con hincapié en las herramientas matemáticas que se usan en el proceso de aproximación de este tipo de funciones; para después, en un segundo instante, sirvan de guía para la construcción de aproximantes regulares de funciones no regulares a partir del conjunto de datos. Todo esto, a partir de un cuerpo de documentos referenciales tales como libros y artículos científicos que abordan el tópico planteado.

Se justifica lo expuesto anteriormente, por un lado, debido a que ayudará a develar y clarificar ante los interesados, el abanico de posibilidades que tiene la aproximación de funciones no regulares, tanto dentro de la propia matemática, como para el área de las ciencias aplicadas, tales como, Geociencias, entre otras; a su vez, servirá de orientación para aquellas personas que quieran involucrarse con esta temática. Mientras por otro, se espera exhortar a los investigadores a indagar en la posibilidad de articular la gama de herramientas ofrecidas en la literatura concerniente a los métodos de aproximación. Aspectos que bien acoplados contribuirá a la cristalización de técnicas de búsqueda y construcción de óptimas funciones regulares aproximantes para las funciones no regulares. Aunado a que, la aproximación numérica de funciones de varias variables que presentan discontinuidades es un tema relevante de investigación, debido a sus aplicaciones en ciencias, geofísica, imágenes médicas, gráficos por computadoras, etc. (Parra, 1999).

Es así que, lo anterior rebela la importancia de las extensas aplicaciones que tiene la aproximación de funciones (curvas y superficies) no regulares. En este sentido, la relevancia del presente trabajo radica en torno a dos aspectos: teórico y aplicaciones. En cuanto a lo teórico, debido a que se presenta de forma organizada los elementos teóricos referentes a la aproximación de funciones no regulares de varias variables. Esto aporta un espacio de discusión y reflexión con la finalidad de motivar el interés a explorar las posibilidades de involucrarse con este tipo de aproximación, articulándolas para enriquecer y fortalecer estos métodos. Por tanto, contribuirá a posibles aplicaciones futuras, puesto que la aproximación de funciones no regulares es un tópico no acabado, debido a sus múltiples usos en diferentes áreas, como por ejemplo, el procesamiento de imágenes, entre otras.

Material y métodos

En esta sección se detallan los materiales y el enfoque metodológico utilizados para alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación, centrada en la revisión y análisis de los métodos clásicos para aproximar superficies discontinuas.

Material

Para la realización del estudio teórico y comparativo, se utilizó como base principal la literatura científica especializada y los artículos seminales que constituyen los fundamentos de cada método. La organización, análisis y visualización conceptual de los detalles estructurales de cada técnica se realizó mediante una revisión detallada. Para la presentación de los resultados y la síntesis de la información, se empleó un entorno de documentación técnica que permitió integrar el análisis narrativo con las formulaciones matemáticas clave.

Métodos

La metodología consistió en un análisis crítico y estructurado de métodos clásicos, agrupados en dos categorías interdependientes: detección y aproximación. Para la detección de discontinuidades, se revisaron y compararon cuatro enfoques paradigmáticos: el análisis multiescala mediante ondículas (*wavelets*) de Mallat y Zhong (1992), los detectores de bordes basados en difusión como el de Canny (1986), los métodos estadísticos de detección de cambio de régimen (Page, 1954; Hinkley, 1971) y las técnicas de ajuste local por mínimos cuadrados (Loader, 1999). Este análisis se centró en sus principios, requisitos de datos, ventajas y limitaciones.

Para la aproximación de superficies discontinuas, el estudio se focalizó en tres métodos numéricos clásicos: el método de Elementos Finitos de Galerkin Discontinuos (DG-FEM), cuyo desarrollo moderno fue liderado por Cockburn y Shu (1989, 1998); los métodos de Partición de la Unidad/Elementos Finitos Generalizados (PUM/GFEM), con fundamentos establecidos por Melenk y Babuška (1996); y los métodos de *splines* de tensión variable, cuyas bases fueron sentadas por Schweikert (1966) y Franke (1985). El análisis de cada método se realizó bajo una estructura uniforme que incluyó su formulación matemática, requisitos, proceso de implementación, funcionalidad y resultados típicos, donde se pone especial énfasis en su capacidad para manejar la variación rápida y los saltos en los datos.

Finalmente, con base en la revisión integrada de estos métodos, se propuso un algoritmo teórico general. Concretamente, un Algoritmo Integrado de Detección y Aproximación Adaptativa para Funciones con Discontinuidades (AIDA-FD) que sintetiza un posible flujo de trabajo para abordar problemas de aproximación de funciones no regulares. Este algoritmo integra las fases de detección, selección adaptativa del método de aproximación y validación iterativa.

Resultados

Esta sección se dedicó a exponer los principales resultados obtenidos a través de una revisión bibliográfica minuciosa, enfocada en los detalles de algunos métodos para aproximar superficies discontinuas. Esto con la finalidad de realizar un análisis e interpretación que, cristalizo una perspectiva crítica sustentada teóricamente con respecto a esta temática.

Análisis de resultados

Para iniciar se presentan algunos métodos detección de discontinuidades, para seguidamente exponer otros métodos relacionados con la aproximación de superficies discontinuas.

Métodos clásicos para detectar o localizar discontinuidades

Este aparatado está dedicado a revisar y presentar los detalles (estructura, requisitos, procesos, funcionalidad y resultados) de métodos clásicos para identificar la localización y características de discontinuidades en conjuntos de datos, un paso crítico previo a la aproximación de superficies discontinuas.

M_1) Método de Mallat-Zhong: Análisis Multirresolución de Wavelet

Autores y desarrollo clásico: El método de Mallat-Zhong, fundamentado en el análisis multiresolución mediante ondículas (wavelets), establece una conexión profunda entre la persistencia de los módulos máximos de la transformada a través de las escalas y la teoría de singularidades. Cuando se utiliza una ondícula que es la derivada de una función de suavizado, la transformada captura la derivada de la señal suavizada a diferentes niveles de resolución. Una singularidad genuina, como un salto discontinuo, genera un módulo máximo cuya magnitud decae de manera característica (lenta y predecible) al aumentar la escala, un comportamiento cuantificado por el exponente de Hölder local que describe la regularidad del punto singular. En contraste, las fluctuaciones debidas al ruido producen módulos máximos que decaen abruptamente en escalas más gruesas. Así, el seguimiento y análisis de la evolución de estas líneas de módulos máximos no solo permite localizar discontinuidades con precisión, sino también distinguirlas de artefactos ruidosos y caracterizar su naturaleza matemática (Mallat & Zhong, 1992).

Estructura y requisitos: Se basa en la Transformada Wavelet Continua (CWT, por sus siglas en inglés) o en una implementación discreta piramidal. Utiliza una *wavelet* que es la derivada de una función de suavizado (por ejemplo, una *wavelet* de tipo *spline* cúbico o la *wavelet* de Marr). Requiere datos muestreados de manera uniforme o regular.

Proceso y funcionalidad:

- Se calcula la transformada de *wavelet* de la señal o datos de superficie en múltiples escalas.

- Se localizan los módulos máximos (picos) de los coeficientes de *wavelet* a través de las escalas. Un punto singular (como un salto) produce una cadena de módulos máximos que persiste a través de las escalas más finas.
- El cruce por cero de los coeficientes de *wavelet* (cuando se usa una *wavelet* derivada) indica la ubicación precisa de la discontinuidad en cada escala. La propagación de estos cruces por cero a través de las escalas identifica la singularidad.

Resultados: El método produce un mapa de líneas de discontinuidades (en 2D) o puntos de salto (en 1D). La magnitud del módulo máximo está relacionada con la fuerza de la discontinuidad. Es efectivo para distinguir discontinuidades de ruido, ya que el ruido genera módulos máximos que decaen rápidamente en escalas más gruesas, mientras que una discontinuidad verdadera persiste.

Ventajas:
- Localización multiescala: Identifica la escala a la que pertenece la singularidad, diferenciando ruido (escalas finas) de discontinuidades estructurales (persistencia en múltiples escalas).
- Precisión de localización: Proporciona una ubicación precisa de la discontinuidad, especialmente en señales 1D o a lo largo de perfiles 2D.
- Caracterización: La tasa de decaimiento de los módulos máximos a través de las escalas brinda información sobre el tipo de singularidad (salto, pico cúspide).

Desventajas:
- Sensibilidad a la alineación: La detección óptima depende de la elección de la *wavelet* madre. Las *wavelets* con más momentos desaparecidos pueden no detectar ciertos tipos de discontinuidades.
- Complejidad en 2D/3D: Extender el análisis de módulos máximos a superficies 2D o 3D es algorítmicamente complejo y computacionalmente costoso.
- Ruido estructurado: Puede confundir patrones de ruido de alta frecuencia con discontinuidades genuinas si no se establece un umbral adecuado.

Formulación matemática:

Sea $\psi(t)$ una *wavelet* que es la derivada de una función de suavizado $\theta(t)$, es decir, $\psi(t) = \frac{d\theta}{dt}$. La Transformada de *Wavelet* Continua (CWT) de una señal $f(t)$ a la escala s y posición u es:

$$W_f(s,u) = \langle f, \psi_{s,u} \rangle = f * \overline{\psi_s},$$

donde $\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$. Dado que ψ es una derivada, se puede demostrar que

$$W_f(s,u) = s\frac{d}{du}(f * \overline{\theta}_s)(u).$$

Por lo tanto, los módulos máximos locales de $|W_f(s,u)|$ corresponden a los puntos de inflexión de f suavizada por θ_s, y los cruces por cero de $W_f(s,u)$ indican los máximos locales de la pendiente,

.

es decir, las ubicaciones probables de saltos (Mallat & Zhong, 1992).

M_2) Método de Canny: Estimadores de detección de bordes basados en difusión

Autores y desarrollo clásico: El desarrollo clásico en la detección de bordes basada en difusión encuentra su hito fundamental en el detector óptimo de Canny (1986), el cual implementa de manera eficiente un filtrado por gradientes con suavizado isotrópico Gaussiano. Sin embargo, su fundamento matemático más profundo y su evolución hacia métodos que preservan discontinuidades con mayor precisión se vinculan a la teoría de la difusión anisotrópica y la optimización de funcionales variacionales. Trabajos seminales como el modelo de difusión no lineal de Perona y Malik (1990) y el modelo de descomposición de imágenes de Rudinet *et al*. (1992) generalizan el concepto al plantear ecuaciones donde el coeficiente de difusión se modula según la magnitud del gradiente local, deteniendo activamente el suavizado en los bordes y permitiéndolo en regiones homogéneas. Estos marcos teóricos establecieron la base para entender y diseñar detectores que no solo identifican discontinuidades, sino que también preservan su localización y nitidez al evitar la difusión a través de ellas.

Estructura y requisitos: En esencia, son métodos que involucran un paso de suavizado anisotrópico o guiado por gradientes, seguido de una detección de umbrales. Requieren datos en una malla estructurada (como una imagen o grilla regular).

Proceso y funcionalidad:

- Suavizado con derivada: Se convoluciona la señal/imagen con la derivada de una Gaussiana, lo que equivale a calcular el gradiente después de un suavizado isotrópico.
- Supresión de no-máximos: En la dirección del gradiente, se eliminan los píxeles que no son máximos locales, para afinar los bordes a un píxel de ancho.
- Umbralización con histéresis: Se usan dos umbrales (alto y bajo). Los píxeles de gradiente por encima del umbral alto se marcan como bordes fuertes; los conectados a estos y por encima del umbral bajo se conservan; el resto se descartan.

Resultados: Genera un mapa binario de bordes (discontinuidades) delgado (de un píxel de ancho) y conectado. Su solidez frente al ruido es alta debido al paso de suavizado y a la histéresis. Es más un detector práctico que un localizador cuantitativo de la magnitud del salto.

Ventajas:

- Robustez al ruido: El filtro Gaussiano inicial suprime eficazmente el ruido de alta frecuencia.
- Bordes conectados y delgados: La supresión de no-máximos y la umbralización con histéresis producen contornos de un píxel de ancho y bien definidos.
- Optimización teórica: El criterio de Canny (buena detección, buena localización, respuesta única) lo convierte en un estándar bien fundamentado.

Desventajas:

- Suavizado de bordes: El filtro Gaussiano difumina la localización exacta del borde, especialmente para escalas grandes de la Gaussiana.
- Parámetros sensibles: El desempeño depende críticamente de la selección del tamaño del kernel Gaussiano (σ) y de los umbrales alto y bajo.
- Limitación a datos estructurados: Está diseñado naturalmente para imágenes (mallas regulares), siendo menos directa su aplicación a datos dispersos o no estructurados.

Formulación matemática:

- Convolución y gradiente: Dada una imagen $I(x,y)$, se calculan las derivadas suavizadas:

$$G_x = \frac{\partial}{\partial x}(I * G_\sigma), \quad G_y = \frac{\partial}{\partial y}(I * G_\sigma)$$

donde $G_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)}$.

- Magnitud y dirección del gradiente:

$$M(x,y) = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}, \quad \ominus(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{G_y}{G_x}\right).$$

- Supresión de no-máximos: Para cada punto, se compara $M(x,y)$ con los dos vecinos en la dirección $\ominus(x,y)$. Si no es el máximo local, se suprime.

Umbralización con histéresis: Se utilizan dos umbrales T_{high} y T_{low}. Los píxeles con $M > T_{high}$ son bordes fuertes. Los píxeles con $M < T_{low}$ se descartan. Los píxeles con $T_{low} \leq M \leq T_{high}$ se mantienen solo si están conectados a un borde fuerte (Canny, 1986).

M_3) Método de cambio de régimen o segmentación

Autores y desarrollo clásico: Basado en principios estadísticos clásicos de detección de cambios. Para señales 1D, la prueba de Page-Hinkley o el algoritmo CUSUM (Cumulative Sum) son referentes (Page, 1954; Hinkley, 1971). Para superficies 2D, se vincula a técnicas de segmentación de imágenes basadas en regiones.

Estructura y requisitos: Asume que los datos pertenecen a diferentes regímenes estadísticos (por ejemplo, diferentes medias o varianzas) separados por la discontinuidad. Requiere un modelo estadístico para la distribución de los datos dentro de cada segmento homogéneo.

Proceso y funcionalidad (Ejemplo 1D - CUSUM):

- Se define una hipótesis nula (no hay cambio) y una hipótesis alternativa (hay un cambio en la media en un tiempo t).
- Se calcula la suma acumulada de las diferencias entre las observaciones y la media estimada bajo la hipótesis nula.
- Se monitorea esta suma acumulada. Cuando su valor absoluto excede un umbral predefinido, se declara la detección de un cambio de régimen (discontinuidad) en el punto donde la suma

empezó a desviarse consistentemente.

Resultados: Identifica los puntos de cambio y segmenta los datos en regiones estadísticamente homogéneas. Proporciona una detección probabilística y es eficaz cuando la discontinuidad se manifiesta como un cambio en las propiedades estadísticas, no solo geométricas.

Ventajas:
- Fundamento estadístico sólido: Proporciona un marco probabilístico para la detección, permitiendo pruebas de significancia.
- Robustez a ruido estocástico: Está diseñado para funcionar en presencia de ruido estadístico, modelando los datos dentro de cada segmento.
- Detección de cambios en propiedades: Puede detectar no solo saltos en el valor, sino cambios en la varianza, tendencia u otros parámetros del modelo.

Desventajas:
- Conocimiento *a priori* del modelo: Requiere asumir o conocer la distribución estadística de los datos en cada segmento (por ejemplo, normal, Poisson).

- Complejidad computacional para múltiples cambios: Los algoritmos exactos para detectar múltiples puntos de cambio son costosos ($O(n^2)$ o peor).
- Sensibilidad a supuestos: Si el modelo estadístico real de los datos se desvía del asumido, la detección puede ser errónea.

Formulación matemática (Algoritmo CUSUM): Se asume una secuencia de observaciones independientes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con media μ_0 antes del cambio y μ_1 después. Se define la suma acumulada de log-verosimilitudes:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \ln\left(\frac{P_{\mu_1}(x_i)}{P_{\mu_0}(x_i)}\right).$$

La estadística de decisión $g_k = S_k - \min_{1\le i\le k} S_i$. Se detecta un cambio en el tiempo t si:

$$g_t = \max_{1\le k\le t}(S_t - S_k) > h,$$

donde h es un umbral de control. El estimador del punto de cambio es $\hat{\tau} = arg \min_{1\le k\le t} S_k$ (Page, 1954; Hinkley, 1971). Para una simple diferencia de medias μ_0 vs. μ_1, esto se reduce a monitorear $S_k = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \mu_0 - {}^{\delta}/_{2}\right)$, donde δ es el cambio mínimo a detectar.

M_4) Técnicas de ajuste local por mínimos cuadrados

Autores y desarrollo clásico: Es un enfoque heurístico sólido, frecuentemente usado como paso previo en algoritmos de interpolación adaptativa (Loader, 1999). Se basa en la comparación de modelos locales ajustados a los datos.

.

Estructura y requisitos: Requiere datos dispersos o en grilla. Se basa en la definición de una ventana local o un conjunto de vecinos más cercanos alrededor de cada punto de evaluación.

Proceso y funcionalidad:

- Para un punto dado, se ajustan dos modelos de regresión local (lineal o cuadrática) usando mínimos cuadrados ponderados; uno con todos los datos en la ventana, y otro excluyendo los datos que están del otro lado de un candidato a frontera.
- Se calcula un indicador de salto, como la diferencia en los residuos de ambos ajustes, o la diferencia entre los valores predichos por dos modelos locales centrados a cada lado del punto.
- Un pico en este indicador, por encima de un umbral estadístico (relacionado con el nivel de ruido), señala una probable discontinuidad.

Resultados: Produce un mapa de "probabilidad" o "indicador de fuerza" de salto en la ubicación de los datos. Es computacionalmente intensivo pero muy adaptable a datos no estructurados y permite distinguir entre un gradiente pronunciado y un verdadero salto.

Ventajas:

- Flexibilidad y simplicidad conceptual: Fácil de entender e implementar para datos en cualquier dimensión y estructura (regulares, dispersos).
- No paramétrico: No asume una forma global para los datos, solo suavidad local fuera de las discontinuidades.
- Adaptabilidad: Permite definir la vecindad de forma adaptativa ($k-$vecinos más cercanos, ventanas de ancho fijo).

Desventajas:

- Elección de parámetros crítica: El tamaño de la ventana o el número de vecinos (k) y el umbral de detección afectan enormemente los resultados. Una ventana grande suaviza los saltos; una pequeña es ruidosa.
- Costo computacional: Ajustar un modelo de regresión local para cada punto o vecindad es intensivo, especialmente para grandes conjuntos de datos.
- Detección ambigua en bordes suaves: Puede tener dificultades para distinguir entre un gradiente muy pronunciado continuo y un verdadero salto discontinuo.

Formulación matemática (Indicador de Salto Basado en Residuos): Para un punto $\boldsymbol{x}_0$ en una superficie 2D con datos $\{(\boldsymbol{x}_i, z_i)\}$ se definen dos vecindades: N_L y N_R, a izquierda y derecha de un candidato a línea de discontinuidad que pasa por $\boldsymbol{x}_0$. Se ajustan dos planos locales por mínimos cuadrados ponderados:

$$\arg\min_{\alpha_L \in \beta_L} \sum_{x_i \in N_L} w_i(z_i - \alpha_L - \beta_L(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0))^2 ,$$
$$\arg\min_{\alpha_R \in \beta_R} \sum_{x_i \in N_R} w_i(z_i - \alpha_R - \beta_L(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0))^2 ,$$

donde w_i son pesos (por ejemplo, función de distancia). El indicador de salto en $\boldsymbol{x}_0$ se define como la diferencia en las alturas predichas:

$$J(\boldsymbol{x}_0) = |\hat{\alpha}_L - \hat{\alpha}_R|$$

Un pico de $J(\boldsymbol{x}_0)$ sobre un umbral ε (derivado del error de ajuste o nivel de ruido) indica una discontinuidad (Loader, 1999). La dirección de la línea de discontinuidad se infiere de la partición N_L, N_R que maximiza $J(\boldsymbol{x}_0)$.

Métodos clásicos para aproximar superficies discontinuas

Dentro del paradigma clásico, la aproximación de superficies con discontinuidades (saltos abruptos, bordes) o no regularidades ha sido abordada mediante métodos que relajan los requisitos de suavidad de las técnicas tradicionales de interpolación. A continuación, se detallan tres métodos fundamentales, su estructura, requisitos, procesos, funcionalidad y resultados típicos.

M_1) Método de Elementos Finitos de Galerkin Discontinuos (DG-FEM, por sus siglas en inglés)

Autores y desarrollo clásico: Aunque sus orígenes conceptuales se remontan a los años 70 (Reed & Hill, 1973, para ecuaciones de transporte neutrónico), su desarrollo y análisis teórico como método sólido para problemas hiperbólicos (que naturalmente desarrollan discontinuidades como ondas de choque) fue impulsado significativamente por Cockburn y Shu (1998) en una serie de trabajos a finales de los 80 y 90.

Estructura y requisitos: Este método combina ideas del método de elementos finitos y los métodos de volúmenes finitos. El dominio se discretiza en elementos (por ejemplo, triángulos, cuadriláteros). La aproximación de la solución es local a cada elemento, donde se utilizan polinomios de cierto grado, y no se exige continuidad en las interfaces entre elementos.

Proceso y funcionalidad: La formulación se basa en una forma débil de las ecuaciones gobernantes, aplicada elemento por elemento. La conexión entre soluciones discontinuas de elementos adyacentes se logra mediante un término de flujo numérico (por ejemplo, el flujo de Godunov, Lax-Friedrichs local), el cual determina de manera estable el valor de la función en los bordes. Se incorporan también términos de penalización para controlar los “saltos”.

Resultados: DG-FEM logra aproximaciones de alto orden precisión en regiones suaves, mientras que captura discontinuidades de manera estable y localizada, sin producir oscilaciones globales (espurias). Es particularmente funcional para leyes de conservación hiperbólicas.

Ventajas:

- Alto orden y localidad: Proporciona aproximaciones de alta precisión (alto orden polinómico) en regiones suaves. La construcción es local por elemento, facilitando el paralelismo y el refinamiento adaptativo (hp-adaptatividad) (Cockburn & Shu, 1998).
- Estabilidad para hiperbólicos: Diseñado intrínsecamente para problemas de convección dominante e hiperbólicos, captura ondas de choque (discontinuidades fuertes) de manera estable sin oscilaciones numéricas destructivas, gracias al uso sólido de flujos numéricos.
- Conservación local: Las leyes de conservación se cumplen localmente en cada elemento, una propiedad física crucial en dinámica de fluidos.
- Manejabilidad de geometrías: Puede emplear mallas no estructuradas con elementos complejos.

Desventajas:
- Costo computacional: Tiene un mayor costo en memoria y operaciones en comparación con métodos continuos de Galerkin, debido al mayor número de grados de libertad (diferentes por elemento) y a la necesidad de resolver términos de flujo en las caras (Hesthaven & Warburton, 2008).
- Complejidad de implementación: La formulación, especialmente el manejo de condiciones de contorno y flujos numéricos, es más compleja que la de los elementos finitos continuos estándar.
- Selección del flujo: La precisión y estabilidad dependen de la elección adecuada del flujo numérico, lo que puede requerir conocimiento específico del problema.

Formulaciones matemáticas del método:
A continuación, se presentan las formulaciones esenciales que definen la estructura del método. Específicamente, la formulación se plantea para un problema modelo de ley de conservación escalar.

Problema modelo: Se busca $u(\boldsymbol{x}, t)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f}(u) = 0 \text{ en } \Omega,$$

donde $\boldsymbol{f}(u)$ es el flujo.

Formulación débil por elementos:
a) Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación de Ω. En cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, se busca una aproximación $u_h \in V_h(K)$, donde V_h es un espacio polinomial de grado k.

b) Se multiplica la ecuación por una función de prueba $v_h \in V_h$, se integra en K, y se aplica el teorema de la divergencia:

$$\int_K \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\boldsymbol{x} - \int_K \boldsymbol{f}(u_h) \cdot v_h \, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial K} \hat{\boldsymbol{f}}(u_h) \cdot \boldsymbol{n}_K v_h \, dS = 0,$$

para toda $v_h \in V_h$.

c) Componente clave - flujo numérico: $\hat{\boldsymbol{f}}(u_h)$ es el flujo numérico, una función definida en las caras ∂K que resuelve la inconsistencia de tener dos valores de u_h (uno de cada elemento adyacente). Para una cara compartida por los elementos K^+ y K^-, depende de ambos valores:

$$\hat{\boldsymbol{f}}(u_h) = \hat{\boldsymbol{f}}(u_h^-, u_h^+, \boldsymbol{n}).$$

Un ejemplo clásico es el flujo de Lax-Friedrichs local:

$$\hat{\boldsymbol{f}}(a, b, \boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(a) - \boldsymbol{f}(b)) \cdot \boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\lambda_{máx}(b - a),$$

donde $\lambda_{máx}$ es una cota local de la velocidad de propagación. Este término estabiliza la solución y permite capturar discontinuidades (Cockburn & Shu, 1998).

M_2) *Métodos de Malla Libre Basados en División de la Función de Base*

Autores y desarrollo clásico: El marco teórico unificador, que conecta directamente el enriquecimiento local con la representación eficiente de discontinuidades y su teoría de convergencia, fue introducido por Melenk y Babuška (1996) bajo el nombre de Método de la Partición de la Unidad (PUM). Este marco establece que, al extender un espacio de aproximación convencional (como el de Elementos Finitos) mediante la incorporación local de funciones que capturan el comportamiento singular o discontinuo de la solución, se puede lograr una convergencia óptima incluso cuando la malla no se alinea con las singularidades. Su realización más conocida en mecánica computacional es el Método de Elementos Finitos Generalizados (GFEM), cuyo desarrollo práctico, análisis numérico detallado de la convergencia para problemas con discontinuidades, y diseminación fueron impulsados decisivamente por los trabajos de Strouboulis, Babuška y Copps (2000, 2001, 2003).

Estructura y requisitos: Extiende el método de elementos finitos clásico al permitir que el espacio local de aproximación en cada elemento sea enriquecido con funciones conocidas que describen el comportamiento local de la solución, como discontinuidades o singularidades.

Proceso y funcionalidad: Sobre una malla de elementos finitos convencional, se utiliza el Método de Partición de la Unidad (PUM, por sus siglas en inglés). Luego, esta base se enriquece localmente, solo en los elementos cortados por una discontinuidad conocida, con una función que incorpore un salto (por ejemplo, una función de Heaviside). La aproximación global es una combinación de las funciones de formas nodales estándar y las enriquecedoras.

Resultados: GFEM/PUM permite modelar discontinuidades internas (interfases, grietas) de manera precisa sin necesidad de alinear la malla con la discontinuidad. Captura el salto de manera exacta si la función enriquecedora lo describe correctamente, mejorando drásticamente la precisión y la tasa de convergencia frente a los FEM estándar.

Ventajas:

- Independencia de la malla: La principal fortaleza es su capacidad para modelar discontinuidades internas (grietas, interfases) sin necesidad de remallar o alinear la malla con la geometría de la discontinuidad (Melenk & Babuška, 1996).
- Precisión mejorada: El enriquecimiento local permite incorporar conocimiento *a priori* de la solución (como la función de Heaviside para un salto), logrando tasas de convergencia óptimas y una representación precisa de la singularidad.
- Flexibilidad: El concepto de enriquecimiento es general y puede aplicarse a diferentes tipos de singularidades (puntas de grieta, capas límite).

Desventajas:

- Problemas de mal condicionamiento: La incorporación de funciones enriquecedoras (especialmente si son casi linealmente dependientes de la base estándar o entre sí en el soporte) genera matrices de rigidez mal condicionadas, lo que dificulta la solución numérica (Babuška & Banerjee, 2012).
- Conocimiento *a priori* requerido: Para enriquecer eficazmente, se necesita conocer o poder predecir la ubicación y naturaleza de la discontinuidad, lo que no siempre es trivial.
- Integración numérica compleja: La evaluación de las matrices requiere una integración precisa sobre elementos cortados por la discontinuidad, necesitando a menudo subdivisiones especiales o técnicas de integración elevada.

Formulaciones matemáticas del método:

A continuación, se presentan las formulaciones esenciales que definen la estructura del método. Específicamente, la formulación se describe para un problema de Poisson con una discontinuidad de salto interno a lo largo de una interfaz Γ.

Espacio de aproximación enriquecido: La solución aproximada $u_h(\boldsymbol{x})$ se construye como:

$$u_h(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\boldsymbol{x}) u_i}_{\text{FEM Estándar}} + \underbrace{\sum_{j \in I_\Gamma} N_j \left[H(\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{x}_j) \right] a_j}_{\text{Enriquecimiento para el salto}} ,$$

donde,

$N_i(\boldsymbol{x})$ son las funciones de forma de FEM clásico (forman la Partición de la Unidad).

I es el conjunto total de nodos.

$I_\Gamma \subset I$ es el conjunto de nodos cuyo soporte es cortado por la interfaz Γ.

$H(\boldsymbol{x})$ es la función de Heaviside asociada a Γ: $H(x) = +1$ en un lado y $H(\boldsymbol{x}) = 0$ en el otro.

u_i y a_j son los grados de libertad estándar y enriquecidos, respectivamente. Restar $H(\boldsymbol{x}_j)$ evita problemas de linealidad (Melenk & Babuška, 1996).

Formulación débil: La formulación variacional (por ejemplo, para Poisson) se arma sustituyendo

u_h y funciones de prueba construidas de manera análoga en la forma bilineal y lineal correspondiente. El enriquecimiento permite representar el salto $[u]|_\Gamma$.

M_3) Interpolación y Aproximación por Splines de Tensión Variable

Autores y desarrollo clásico: Los *splines* de placa delgada (Duchon, 1976) son un método de suavizado óptimo para datos irregulares, pero suavizan excesivamente las discontinuidades. Para controlar esto, se desarrollaron métodos que adaptan localmente el parámetro de suavizado. Un enfoque clásico e influyente es el de los *splines* con tensión introducidos por Schweikert (1966) y luego desarrollados para superficies por Franke (1985) entre otros.

Estructura y requisitos: Parten de la minimización de un funcional de energía que balancea un término de ajuste a los datos y un término de "energía de curvatura" que penaliza la ondulación. La innovación está en modificar el operador de suavizado (de Laplaciano a Helmholtz) introduciendo un parámetro de tensión (φ). Para capturar discontinuidades, este parámetro se hace local y variable.

Proceso y funcionalidad: El proceso implica dos pasos clave: P_1) Detección de regiones de posible discontinuidad (mediante análisis de gradientes o residuos). P_2) Ajuste local del parámetro de tensión $\varphi(x, y)$: en regiones suaves, φ es pequeño, permitiendo flexibilidad; cerca de discontinuidades detectadas, φ se incrementa fuertemente, tensando la superficie para evitar el sobre-suavizado del salto.

Resultados: Este método produce una superficie que es continua en valor (C^0) pero puede tener cambios bruscos en el gradiente. Permite una transición más aguda en los bordes que los *splines* de suavizado global, aunque la localización exacta y magnitud del salto dependen críticamente del esquema de detección y ajuste del parámetro.

Ventajas:

- Aplicabilidad a datos dispersos: Es un método muy adecuado para la interpolación/aproximación de datos dispersos e irregulares, común en geociencias y cartografía (Franke, 1985).
- Control adaptativo del suavizado: Permite un control local explícito del comportamiento de la superficie, relajando el suavizado donde los datos varían suavemente y forzando un comportamiento más rígido (tensión) cerca de saltos detectados, preservando así pendientes pronunciadas.
- Continuidad garantizada: Produce una superficie globalmente continua (C^0), lo cual es deseable en ciertas visualizaciones y evita huecos.

Desventajas:

- Dependencia crítica de parámetros: La calidad del resultado depende fuertemente del algoritmo de detección de discontinuidades y de la función que mapea los gradientes/residuos a los valores del parámetro de tensión. Es sensible y heurístico.

- Suavizado de saltos: A diferencia de GFEM o DG-FEM, no reproduce saltos exactos. En el mejor caso, produce una transición muy pronunciada pero continua, que puede difuminar la discontinuidad real (Billings, 2013).
- Falta de base teórica fuerte: Para configuraciones generales de datos, suele ser más un método práctico que uno con garantías teóricas sólidas de convergencia hacia la función discontinua subyacente.

Formulaciones matemáticas del método:
A continuación, se presentan las formulaciones esenciales que definen la estructura del método. Específicamente, la formulación parte del problema de minimización de un funcional de energía.

Funcional de energía generalizado: Se busca la función $s(\boldsymbol{x})$ que minimice:

$$J(s) = \sum_{i=!}^{N} w_i |z_i - s(\boldsymbol{x_i})|^2 + \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{x}) \Phi(\nabla s, \nabla^2 s) d\boldsymbol{x},$$

donde el primer término mide el ajuste a los datos $\{(\boldsymbol{x}_i, z_i)\}_{i=1}^{N}$ y el segundo es un regularizador que penaliza la oscilación.

Forma del regularizador para tensión variable: Para *splines* de tensión, Φ suele involucrar derivadas primeras. Un modelo común (en 1D para claridad, extendible a 2D) es:

$$J(s) = \sum_{i=!}^{N} w_i (z_i - s(x_i))^2 + \int_{\Omega} \tau(x) \big(s''(x)\big)^2 + \sigma(x) \big(s'(x)\big)^2 dx.$$

En 2D, el término de tensión a menudo se formula con el uso del operador de Helmholtz. La idea clave es que $\sigma(\boldsymbol{x})$ (o $\tau(\boldsymbol{x})$) no es constante, sino una función de tensión local.

Función de tensión local: $\sigma(\boldsymbol{x})$ se define en función del gradiente o residuo de un ajuste preliminar. Por ejemplo:

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \alpha e^{(\beta ||\nabla s_0(\boldsymbol{x})||^2)},$$

donde s_0 es un *spline* de suavizado inicial. En regiones con alto gradiente (posible discontinuidad), $\sigma(\boldsymbol{x})$ se hace grande, donde se penaliza fuertemente las pendientes grandes y se tensa la superficie para que no se suavice demasiado (Franke, 1985; Billings, 2013). La minimización de $J(s)$ conduce a una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) elíptica con coeficientes variables.

Discusión

En esta sección se expone la discusión de los resultados obtenidos en el apartado anterior. Se comienza presentando el análisis de los métodos de detección y, después los de aproximación para superficies discontinuas. Específicamente, el presente estudio revisó métodos clásicos fundamentales para dos tareas críticas y secuenciales en el tratamiento de superficies discontinuas: detección/localización y aproximación. El análisis revela un panorama donde la elección del método no es única, sino que está dictada por la naturaleza de los datos.

Respecto a la detección, los métodos analizados ofrecen filosofías complementarias. Los basados en *wavelets* (Método de Mallat-Zhong) proporcionan un marco matemático elegante y multiescala, ideal para señales 1D o perfiles donde la localización precisa y la caracterización del tipo de singularidad son primordiales (Mallat & Zhong, 1992). Sin embargo, su extensión a superficies 2D/3D complejas y su sensibilidad a parámetros como la *wavelet* madre pueden limitar su aplicabilidad general. En contraste, los detectores difusivos (Método de Canny) ofrecen una herramienta sólida y algorítmicamente madura para datos estructurados (imágenes), con prioridad en la continuidad de los bordes y la supresión del ruido, a costa de difuminar la localización exacta (Canny, 1986).

Por otro lado, los métodos estadísticos abordan el problema desde un paradigma diferente, modelando la discontinuidad como un cambio de régimen. Su fortaleza reside en la detección probabilística y la capacidad de identificar cambios en propiedades estadísticas más allá del valor medio, siendo robustos al ruido estocástico, aunque requieren asumir un modelo de distribución para los datos (Page, 1954; Hinkley, 1971). Finalmente, las técnicas de ajuste local (mínimos cuadrados) destacan por su flexibilidad y adaptabilidad a datos no estructurados. Esto actúa como un detector heurístico efectivo cuando no se dispone de un modelo estadístico claro, aunque su desempeño depende críticamente de la elección de los parámetros de la vecindad y del umbral (Loader, 1999). En síntesis, no existe un detector universal: la *wavelet* es preferible para un análisis multiescala profundo, Canny para procesamiento de imágenes ruidosas, el método estadístico para datos con un modelo conocido y el ajuste local para una primera exploración flexible. En otras palabras, estos métodos son ideales para datos donde el modelo estadístico es conocido, pero su aplicabilidad puede reducirse en contextos exploratorios.

En cuanto a la aproximación, los métodos revisados responden a la disyuntiva entre fidelidad a la física del problema y flexibilidad geométrica. Los Elementos Finitos de Galerkin Discontinuos (DG-FEM) se erigen como la solución intrínseca para problemas gobernados por leyes de conservación hiperbólicas, donde la discontinuidad (por ejemplo, un choque) es parte de la solución débil. Su fortaleza radica en la conservación local, el alto orden de precisión y la estabilidad probada, pagando el precio de una mayor complejidad computacional y de implementación (Cockburn & Shu, 1998). Cuando la discontinuidad es una interfaz geométrica fija o una grieta dentro de un dominio, los Métodos de Partición de la Unidad/GFEM ofrecen una solución elegante al desacoplar la malla de la geometría de la discontinuidad. Su capacidad de enriquecimiento local con funciones conocidas (Heaviside) permite una representación exacta del salto, pero introduce el severo desafío numérico del mal condicionamiento de las matrices (Melenk & Babuška, 1996; Babuška & Banerjee, 2012).

Para problemas de aproximación pura de datos dispersos y ruidosos donde la discontinuidad es un gradiente extremadamente pronunciado, los *splines* de tensión variable ofrecen un control práctico y local del suavizado. No obstante, su naturaleza heurística y su incapacidad para representar saltos exactos los sitúan como un método de regularización adaptativa más que de reconstrucción precisa de discontinuidades (Franke, 1985; Billings, 2013).

La interacción entre detección y aproximación es simbiótica y define un flujo de trabajo típico. Métodos de detección como los basados en mínimos cuadrados locales o en *wavelets* pueden alimentar parámetros clave para los métodos de aproximación: identificar la ubicación de la interfaz para el enriquecimiento en GFEM, o guiar la función de tensión local $\sigma(\boldsymbol{x})$ en los *splines*. A su vez, un paso de aproximación preliminar (como un *spline* de suavizado global) puede proporcionar los residuos o gradientes necesarios para inicializar un detector estadístico o por *wavelets*.

Finalmente, se observa que la aproximación de SD es un campo inherentemente híbrido. Los métodos más eficaces suelen combinar una etapa de detección sólida, adaptada a la estadística y geometría de los datos, con una etapa de aproximación cuyo núcleo matemático esté alineado con la física subyacente que genera la discontinuidad (conservación, fractura, cambio de régimen). Los desarrollos futuros continúan en la línea de mejorar la solidez y eficiencia de esta integración, automatizando la selección de parámetros y extendiendo estos marcos clásicos a volúmenes de datos más grandes y complejos.

Para finalizar este apartado, se resume la propuesta del Algoritmo Teórico General AIDA-FD (Algoritmo Integrado de Detección y Aproximación Adaptativa para Funciones con Discontinuidades), una guía metodológica sintetizada a partir de la revisión de los métodos clásicos. Su objetivo es guiar de manera sistemática y sólida la aproximación de funciones no regulares a partir de datos, integrando de manera cíclica la detección, la selección adaptativa del método y la validación iterativa.

La estructura del algoritmo se organiza en cinco fases secuenciales:

P_1) Preprocesamiento y análisis exploratorio: Normalización de datos y obtención de una aproximación de suavizado global para generar un campo de referencia.

P_2) Detección y caracterización: Cálculo de un campo indicador de discontinuidad (mediante técnicas como ondículas, análisis de gradientes o residuos) y extracción de las interfaces candidatas (Γ_0).

P_3) Selección y aplicación adaptativa: Clasificación del dominio según las interfaces detectadas y selección del método de aproximación más adecuado (GFEM/PUM, DG-FEM o *splines* adaptativos) en función de la naturaleza de la discontinuidad y los datos.

P_4) Validación y refinamiento iterativo (Opcional): Análisis de residuos para corregir la localización de discontinuidades y refinar la aproximación en un ciclo de realimentación.

P_5) Salida y cuantificación de incertidumbre: Entrega de la función aproximada final, la geometría de las discontinuidades y un mapa de confianza que combina densidad de datos, residuos y proximidad a las discontinuidades.

En esencia, el marco AIDA-FD subraya la importancia crítica de combinar herramientas de detección específicas con esquemas numéricos diseñados para manejar discontinuidades. Al unificar la identificación de la singularidad, la aplicación inteligente del método numérico y el control de calidad iterativo, este algoritmo proporciona una guía adaptable para abordar el complejo problema de la aproximación de superficies discontinuas, sintetizando las lecciones fundamentales de la literatura revisada.

Conclusiones

El problema de aproximación de funciones (curvas y/o superficies) regulares tanto para funciones explícitas como paramétricas, ha sido por muchos años las referencias estándar para realizar aproximaciones de funciones no regulares. En la primera temática, existen muchas fuentes bibliográficas que los abordan y documentan en la literatura científica, por lo general, desde perspectivas de técnicas especializadas como lo son las de interpolación y ajustes de funciones regulares. Mientras que, en la segunda línea de investigación, los procesos básicos para aproximar funciones no regulares yacen en los métodos de aproximación de funciones regulares, puesto que suelen ser adaptaciones de estos últimos tomando en cuenta el conjunto de discontinuidad.

En ambas situaciones, aun es un tema novedoso e interesante que se encuentra frecuentemente en varios campos de aplicaciones científicas. Particularmente, debido a la presencia de fuertes y rápidas variaciones en el conjunto de datos conocidos, el interés se centra en innovar con respecto a: la obtención de buenos, mejorados y precisos resultados en el caso de ajuste de curvas y superficies no regulares; calidad de la aproximación, dificultad de la implementación y el tiempo de ejecución; asimismo, como la consideración de que el paso de detección y el de aproximación forman parte del mismo problema; entre otros aspectos. Pero esencialmente, en este tipo de funciones no regulares es imprescindible evitar posibilidad de que se produzca el fenómeno de Gibss.

En cuanto a los objetivos propuestos en la presente investigación, sobre analizar los métodos de aproximación de funciones regulares y no regulares, para identificar las técnicas y pasos, así como, organizar la información obtenida en un algoritmo general, se puede inferir que, la aproximación de funciones (curvas y/o superficies) no regulares bajo la suposición de tener un conjunto de dados , consiste en: P_1) Detección del conjunto de discontinuidad y P_2) Aproximación de la función observada; ambos pasos, pueden ser considerados como parte del mismo problema de forma interdependiente o, independiente.

En cuanto a algunos de los aspectos elementales representativos se tiene que, los requerimientos y procesamientos pueden variar dependiendo del punto de partida (P_1 o P_2), por ejemplo, si se parte del paso de detección del conjunto de discontinuidades, se pueden requerir de datos dispersos o regularmente distribuidos; mientras que, primero, si se comienza directamente en el paso de aproximación de la función observada, es un requisito indispensable solicitar la localización del conjunto de discontinuidad. Al respecto, muchos de los métodos existentes que sólo consideran esta segunda parte del problema de aproximación mencionado, como requerimiento para su implementación solicitan información sobre las grandes variaciones en el conjunto de datos. En relación con esto último, se resalta que cuando en el problema de aproximación los dos pasos se tratan de modo independiente, no siempre resulta fácil adaptar y acoplar los resultados del primero de ellos (P_1) con las condiciones de entrada del segundo (P_2), puesto que, no necesariamente son compatibles los resultados de las investigaciones que los consideran por separados.

Asimismo, la funcionalidad y resultados dependen del paso aplicado, por ejemplo, si solo se utiliza P_1 la prioridad se encuentra en la localización del conjunto de discontinuidades; mientras que, si se aplica únicamente P_2 el interés se encuentra en la obtención de una aproximante regular a partir del conocimiento del conjunto de discontinuidad. Empero, si la idea es obtener el esquema completo de aproximación se deben aplicar ambos pasos consecutivamente. Segundo, en cuanto a las técnicas más sobresalientes que contemplan los métodos de aproximación de funciones no regulares se encontraron: Método de Elementos Finitos de Galerkin Discontinuos, Métodos de Malla Libre Basados en División de la Función de Base e Interpolación y Aproximación por *Splines* de Tensión Variable.

Tercerto, a modo de ilustración se presentó un algoritmo teórico que guía el proceso de aproximación de funciones no regulares. En este se presentó el esquema de forma general e incremental que contempla el proceso de aproximación de superficies discontinuas, donde se han puntualizado de manera detallada los elementos teóricos involucrados y que son la base para este tipo de aproximación.

En términos generales, la investigación confirmo la importancia de considerar que el paso de detección y el de aproximación forman parte del mismo problema, puesto que, no siempre son compatibles; además, este trabajo permitió obtener un panorama tanto local como global con respecto a la estructura del algoritmo de aproximación de funciones discontinuas, lo que puede servir de base para diseñar nuevos métodos convenientes a partir de la selección de herramientas disponibles en la literatura y, utilizarlos localmente en el algoritmo presentado en esta investigación, por ejemplo intercambiar los métodos de detección o de aproximación; asimismo, ayudará en la trayectoria a seguir para una posible implementación en algún lenguaje de programación de preferencia, para ser considerado en aplicaciones de problemas de aproximaciones reales; del mismo modo, contribuirá en el estudio teórico con miras a futuras aplicaciones.

Finalmente, el campo aplicado como las Geociencias, presentan cada día nuevos desafíos para la línea de investigación de aproximación de funciones (curvas y/o superficies) tanto regulares como no regulares, principalmente, en cuanto estructura, requisitos, procesos, funcionalidad y resultados. Es así que, el presente trabajo procura inspirar a los investigadores noveles a partir de un panorama de los métodos de aproximación de funciones no regulares, para involucrarse en la técnicas necesarias para la localización del conjunto de discontinuidad, así como, la construcción de funciones aproximantes; particularmente, en el diseño de métodos con una perspectiva integradora los dos pasos anteriores, los cuales son necesarios para un esquema completo de aproximación de superficies discontinuas. Esto con la finalidad de cristalizar nuevos avances de investigación tanto de carácter teórico como prácticos a partir de posibles aplicaciones futuras. Con respecto a esto último, una propuesta de construcción de un espacio de aproximación y un método para superficies discontinuas se proponen a futuro.

Referencias bibliográficas

Abancín, R. A., Dávalos, M. & Morocho, J. (2024). Detection and coverage of polygonal curves derived from vertical faults present on discontinuous surfaces. *Bull. Comput. Appl. Math. (CompAMa), 12*(2), 1−25. Obtenido de: https://drive.google.com/file/d/1anbfrg7zt-YGo3TaAO_niPRt7ncGNA3f/view

Alart, P., & Curnier, A. (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92*(3), 353-375.

Babuška, I., & Banerjee, U. (2012). Stable generalized finite element method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204, 91-111. https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.09.012

Billings, S. D. (2013). *Geological mapping using potential fields data: A celebration of the career of Derek Fairhead*. En M. C. Dentith (Ed.), Geophysical potential fields: Geology versus geometry (pp. 51-62). ASEG Extended Abstracts.

Belytschko, T., & Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45*(5), 601-620.

Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37*(2), 229-256.

Boyd, J. P. (2001). *Chebyshev and Fourier spectral methods* (2nd ed.). Dover Publications.

Canny, J. (1986). A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-8*(6), 679-698. https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851

Carslaw, H. S. (1930). *Introduction to the theory of Fourier's series and integrals* (3rd ed., Vol. 1). Dover Publications. (Obra original publicada en 1906).

Cockburn, B., & Shu, C. W. (1989). TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: General framework. *Mathematics of Computation, 52*(186), 411-435. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4

Cockburn, B., & Shu, C. W. (1998). The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: Multidimensional systems. *Journal of Computational Physics, 141*(2), 199-224. https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5892

Duchon, J. (1976). Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle. Analyse Numérique, 10(R2), 5-12. https://doi.org/10.1051/m2an/197610R200051

Franke, R. (1985). Thin plate splines with tension. *Computer Aided Geometric Design, 2*(1-3), 87-95. https://doi.org/10.1016/0167-8396(85)90010-7

Gibbs, J. W. (1899). *Fourier's series. Nature, 59*(1539), 606.

Gout, C. Le Guyader, C. Romani, L. & Saint-Guirons, A. (2008). Approximation of surfaces with fault(s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D^m *−splines* and the finite element method. *Numerical Algorithms*, 48, 67-92. DOI 10.1007/s11075-008-9177-8

Gottlieb, D., & Shu, C. W. (1997). *On the Gibbs phenomenon and its resolution*. SIAM Review, 39(4), 644–668. https://doi.org/10.1137/S0036144596301390

Gout, C. & Ramière, I. (2003). Surface approximation from rapidly varying bathymetric data, *IEEE IGARSS, 4*(IV), 2679−2681.

Harten, A., Engquist, B., Osher, S., & Chakravarthy, S. R. (1987). Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *Journal of Computational Physics, 71*(2), 231-303. https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90031-3

Hesthaven, J. S., & Warburton, T. (2008). *Nodal discontinuous Galerkin methods: Algorithms, analysis, and applications*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-72067-8

Hinkley, D. V. (1971). Inference about the change-point in a sequence of random variables. *Biometrika, 57*(1), 1-17. https://doi.org/10.1093/biomet/57.1.1

Lions, P. L. (1990). *On the Schwarz alternating method. II: Stochastic interpretation and order properties*. En R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant & J. Périaux (Eds.), Domain decomposition methods for partial differential equations (pp. 47-70). SIAM.

Liu, X. D., Osher, S., & Chan, T. (1994). Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics, 115*(1), 200-212.

Loader, C. (1999). *Local regression and likelihood*. Springer-Verlag.

Mallat, S., & Zhong, S. (1992). Characterization of signals from multiscale edges. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 14(7), 710-732. https://doi.org/10.1109/34.142909

Melenk, J. M., & Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139*(1-4), 289-314. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01087-0

Ortiz, M., & Pandolfi, A. (1999). Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44*(9), 1267-1282.

Parra, M.C. (1999). *Sobre detección de discontinuidades y aproximación de funciones no regulares*. Tesis de Doctorado. España: Universidad de Zaragoza.

Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika, 41*(1/2), 100-115. https://doi.org/10.2307/2333009

Perona, P., & Malik, J. (1990). Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12*(7), 629-639. https://doi.org/10.1109/34.56205

Reed, W. H., & Hill, T. R. (1973). *Triangular mesh methods for the neutron transport equation* (Tech. Rep. LA-UR-73-479). Los Alamos Scientific Laboratory.

Rudin, L. I., Osher, S., & Fatemi, E. (1992). Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena, 60*(1-4), 259-268. https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F

Schweikert, D. G. (1966). An interpolation curve using a spline in tension. *Journal of Mathematics and Physics, 45*(1-4), 312-317. https://doi.org/10.1002/sapm1966451312

Strang, G., & Nguyen, T. (1996). *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press.

Strouboulis, T., Babuška, I., & Copps, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181*(1-3), 43-69. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00072-9

Strouboulis, T., Copps, K., & Babuška, I. (2001). The Generalized Finite Element Method: An example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47*(8), 1401-1417. https://doi.org/10.1002/1097-0207(20010320)47:8<1401::AID-NME1024>3.0.CO;2-0

Strouboulis, T., Babuška, I., & Copps, K. (2001). The Generalized Finite Element Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(32-33), 4081-4193. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00354-4

Babuška, I., Strouboulis, T., & Copps, K. (2003). The Generalized Finite Element Method. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/0471721219

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Agradecimiento:

Este trabajo agradece el respaldo brindado por los Programas de Doctorado en Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar (USB) y la Carrera de Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), fundamentales para la realización de esta investigación.

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.