



Doi: <https://doi.org/10.70577/asce.v5i1.744>

**Recibido:** 2026-01-22

**Aceptado:** 2026-02-24

**Publicado:** 2026-03-30

## **Aprendizaje Basado en Problemas mediado por GeoGebra en la comprensión de vectores en $\mathbb{R}^3$ en estudiantes de Ingeniería Civil**

### **Problem-Based Learning mediated by GeoGebra in the understanding of vectors in $\mathbb{R}^3$ in Civil Engineering students**

**Autor**

**Santiago Israel Arciniega Castro<sup>1</sup>**

Facultad de Posgrados, Escuela de Educación, Maestría en educación, mención Docencia e Investigación en Educación Superior

<https://orcid.org/0009-0002-0268-5595>

[aarciniegac@unemi.edu.ec](mailto:aarciniegac@unemi.edu.ec)

**Universidad Estatal de Milagro**

Ecuador

#### **Cómo citar**

Arciniega Castro, S. I. (2026). Aprendizaje Basado en Problemas mediado por GeoGebra en la comprensión de vectores en  $\mathbb{R}^3$  en estudiantes de Ingeniería Civil. *ASCE MAGAZINE*, 5(1), 3282–3303.



---

## Resumen

La comprensión de los vectores en  $\mathbb{R}^3$  constituye un desafío persistente en la educación superior. Esta dificultad se explica, en parte, por las demandas cognitivas asociadas a los procesos de visualización espacial que exige la representación de objetos en un entorno tridimensional, así como por la complejidad inherente a la articulación entre sus representaciones geométricas y sus propiedades algebraicas. El presente estudio evaluó el efecto del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) mediado por GeoGebra en el desempeño educativo y la comprensión conceptual de vectores tridimensionales en la asignatura de Álgebra Lineal. Se empleó un diseño cuasi-experimental de grupo único con pre-test y post-test. La población inicial estuvo conformada por 28 estudiantes de Ingeniería Civil, de los cuales 23 completaron todas las fases del estudio, constituyendo la muestra final ( $n = 23$ ). Los resultados evidenciaron un incremento significativo en el promedio de calificaciones de 8.09 a 9.65 y una reducción en la tasa de reprobación del 40% al 3.7%. Los resultados sugieren que la integración del ABP con herramientas de visualización tridimensional mejora significativamente la comprensión conceptual y el desempeño académico en esta rama fundamental de la matemática.

**Palabras clave:** Álgebra; Aprendizaje Basado En Problemas; Tecnología Educacional; Geometría; Percepción Del Espacio; Enseñanza Superior.



## Abstract

Understanding vectors in  $\mathbb{R}^3$  remains a persistent challenge in higher education. This difficulty is partly explained by the cognitive demands associated with the spatial visualization processes required to represent objects in a three-dimensional environment, as well as by the inherent complexity of linking their geometric representations with their algebraic properties. This study evaluated the effect of Problem-Based Learning (PBL) mediated by GeoGebra on academic performance and conceptual understanding of three-dimensional vectors in a Linear Algebra course. A single-group quasi-experimental design with pre-test and post-test was used. The initial population consisted of 28 Civil Engineering students, of whom 23 completed all phases of the study, constituting the final sample ( $n = 23$ ). The results showed a significant increase in the average grade from 8.09 to 9.65 and a reduction in the failure rate from 40% to 3.7%. The results suggest that integrating PBL with three-dimensional visualization tools significantly improves conceptual understanding and academic performance in this fundamental branch of mathematics

**Keywords:** Algebra; Problem Based Learning; Educational Technology; Geometry; Space Perception; Higher Education.



## Introducción

La ingeniería civil contemporánea se fundamenta en la capacidad de modelar y manipular el espacio físico para el diseño de infraestructuras eficientes y seguras. En este contexto, la matemática no es una herramienta secundaria, sino el lenguaje fundamental y esencial que describe la realidad estructural. De forma específica el dominio de los vectores en el espacio tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ) constituye la base para analizar fenómenos físicos críticos como la distribución de fuerzas en armaduras espaciales, la dinámica de fluidos y la respuesta sísmica de edificaciones. Normativas internacionales de diseño, como el estándar American Society of Civil Engineers. (2022), exigen una precisión rigurosa en la descomposición vectorial de cargas de viento y sismo, donde la correcta interpretación de magnitud, dirección y sentido determina la estabilidad y seguridad de las obras civiles.

La enseñanza del Álgebra Lineal en la universidad, pese a su reconocida importancia en la formación profesional, continúa enfrentando dificultades que han sido ampliamente documentadas en investigaciones recientes sobre educación matemática (Gómez & Pérez, 2024). Numerosos estudios señalan que muchos estudiantes de ingeniería llegan a cursos como mecánica o análisis estructural con vacíos en los fundamentos vectoriales, resultado de una formación centrada en la aplicación mecánica de algoritmos más que en la comprensión geométrica. Esta situación genera un problema evidente: mientras los estudiantes se desenvuelven con relativa facilidad en el plano bidimensional, encuentran obstáculos al trasladar esos conceptos al espacio tridimensional. Tal como lo advierten Guzmán y Zambrano (2014) y Bouhjar et al. (2021), esta transición provoca confusiones frecuentes en nociones esenciales como dirección, componentes y magnitud. La consecuencia inmediata es una brecha conceptual que limita la construcción de estructuras mentales sólidas, indispensables para abordar con éxito problemas de ingeniería de mayor complejidad.

Desde el enfoque de la didáctica matemática, la transición del plano al espacio tridimensional plantea obstáculos epistemológicos específicos. A partir de la propuesta de Bachelard, dichos obstáculos se entienden como saberes previos que, si bien resultan útiles en escenarios elementales, se convierten en limitaciones al intentar acceder a conocimientos más complejos; en este sentido, el paso a  $\mathbb{R}^3$  constituye una ruptura cognitiva significativa. Entre las dificultades más comunes se



identifican la confusión entre vector y punto como coordenada, la incapacidad de concebir la ortogonalidad más allá de los ejes canónicos y la interpretación meramente algebraica del producto vectorial, que omite su función como generador de normalidad en el espacio. Esta restricción, denominada en la literatura “obstáculo del formalismo”, ha sido corroborada por investigaciones recientes (Stewart et al., 2022), las cuales evidencian que la exposición axiomática y la representación bidimensional de objetos tridimensionales constituyen una barrera cognitiva considerable. Sin una adecuada visualización espacial, conceptos como la dependencia lineal y los subespacios vectoriales permanecen como abstracciones difíciles de asimilar, lo cual limita la consolidación del razonamiento geométrico esencial en la formación de ingenieros.

El predominio del enfoque pedagógico tradicional en las escuelas de ingeniería ha contribuido a mantener las deficiencias señaladas. La organización de las clases bajo la secuencia definición, teorema y ejercicios rutinarios genera una dinámica pasiva, en la que el estudiante se limita a reproducir algoritmos sin lograr una comprensión profunda de los fundamentos teóricos ni de su aplicación práctica. Como consecuencia, los futuros profesionales adquieren destrezas en el cálculo de determinantes y en la manipulación de matrices, pero no desarrollan la capacidad de representar ni modelar problemas espaciales de carácter real. Esta limitación coincide con la crítica de Trigueros (2022), quien advierte que una enseñanza descontextualizada impide la “reificación” de los conceptos matemáticos. En este sentido, los contenidos esenciales del Álgebra Lineal terminan reducidos a instrumentos formales aislados, cuya transferencia a situaciones concretas de diseño estructural resulta ineficaz.

Frente a las limitaciones señaladas, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) emerge como una alternativa pedagógica consistente, sustentada en los principios del constructivismo y del aprendizaje significativo. Esta metodología, concebida inicialmente por Barrows (1986) en el campo de la educación médica, ha sido adoptada con relevante éxito en diversas áreas de la ingeniería contemporánea (Guo et al., 2021). A diferencia del enfoque tradicional, el ABP invierte la lógica de enseñanza: el proceso se inicia con un problema complejo y poco estructurado que simula situaciones propias del ejercicio profesional. En este contexto, el estudiante asume un rol activo y construye el conocimiento matemático como recurso empírico indispensable para resolver



el desafío planteado, lo que favorece un aprendizaje profundo y el desarrollo de competencias para la resolución de problemas en la educación superior (Sari et al., 2022).

En el ámbito específico del Álgebra Lineal, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) facilita la transición desde la abstracción formal hacia la modelación matemática aplicada. Al situar al estudiante frente a escenarios que involucran, por ejemplo, la optimización de trayectorias o el análisis de condiciones de equilibrio, se promueve un aprendizaje contextualizado en el que los conceptos y procedimientos adquieren un valor funcional inmediato. Estudios recientes, incluidos los meta-análisis de Guo et al. (2021) y Sari et al. (2022), indican que la incorporación del ABP en la educación superior no solo mejora el desarrollo de competencias, sino que también potencia el pensamiento crítico y la capacidad de resolución de problemas, competencias transversales esenciales en la formación del ingeniero contemporáneo.

La integración del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la enseñanza de vectores en  $R^3$  constituye el eje central de esta propuesta didáctica. Es fundamental que el estudiante comprenda que los vectores no representan entidades matemáticas aisladas, sino construcciones abstractas que permiten modelar fenómenos físicos concretos como la fuerza, la velocidad, el desplazamiento o el equilibrio. A través del ABP, el proceso de aprendizaje transita desde un enfoque meramente operativo hacia una comprensión geométrica más profunda y, finalmente, hacia la modelación aplicada en la ingeniería. En este marco, el problema se convierte en el detonante que genera la necesidad de interpretar la dirección y la magnitud en el espacio, para otorgar un sentido físico a procedimientos algebraicos que, de otro modo, quedarían reducidos a formalismos sin contexto.

La implementación del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en un contexto tridimensional requiere del apoyo de recursos tecnológicos que permitan superar las limitaciones de visualización propias de los medios tradicionales como el papel y la pizarra. En este sentido, el presente trabajo se sustenta en la Teoría de las Herramientas Cognitivas (Jonassen, 2000), actualizada en entornos digitales contemporáneos por Dron (2023). Dicha teoría plantea que las tecnologías no deben entenderse únicamente como transmisores de información, sino como aliados intelectuales que asumen parte de la carga de procesamiento cognitivo del estudiante (Jonassen, 2000). Bajo este marco conceptual, se incorpora el software de geometría dinámica GeoGebra 3D, el cual funciona como una extensión de la capacidad cognitiva del individuo (Dron, 2023), al facilitar la externalización y manipulación de representaciones mentales complejas. Su potencial para ofrecer



visualización dinámica, rotación de perspectivas y retroalimentación inmediata brinda a los estudiantes la posibilidad de experimentar activamente con vectores, contrastar conjeturas geométricas en tiempo real y reducir la distancia entre la intuición espacial y la formalización algebraica.

Si bien existe abundante evidencia acerca de la eficacia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en cursos de cálculo y álgebra elemental, revisiones sistemáticas recientes en educación matemática aplicada a la ingeniería (Mendoza & Valdés, 2023) señalan que aún persiste un vacío relevante respecto a su implementación específica para fortalecer la comprensión conceptual del espacio vectorial tridimensional. Hasta el momento, las investigaciones han abordado de manera limitada cómo la combinación entre problemas contextualizados y herramientas de visualización dinámica contribuye a superar los obstáculos epistemológicos vinculados con  $R^3$ . Este campo, de gran importancia en la formación de ingenieros civiles, constituye el núcleo de la presente investigación, cuyo propósito es aportar nueva evidencia empírica que enriquezca el debate académico en el área.

La relevancia de esta investigación se fundamenta en su potencial para transformar la práctica pedagógica en las ciencias básicas. La estrategia propuesta busca reducir la tendencia hacia la memorización mecánica y, en su lugar, promover una comprensión más profunda que fortalezca la capacidad de visualización espacial. Asimismo, se proyecta un impacto positivo en la transferencia de aprendizajes hacia asignaturas de carácter profesionalizante, como física, estática y análisis estructural. Este efecto resulta especialmente significativo en el contexto ecuatoriano, donde las elevadas tasas de reprobación en ciencias exactas constituyen uno de los principales factores de abandono universitario. De acuerdo con datos recientes del sistema de educación superior analizados por Mora y Jaramillo (2023), la deserción universitaria en Ecuador alcanza el 20,46%, con una incidencia crítica en los primeros semestres de las carreras de ingeniería, debido a la complejidad inherente de las matemáticas abstractas. Esta evidencia empírica subraya la necesidad urgente de implementar intervenciones didácticas que favorezcan un aprendizaje significativo y contribuyan a la permanencia estudiantil.



A partir de los antecedentes revisados, donde se ha demostrado que la convergencia entre el enfoque constructivista del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y el uso de software dinámico como herramienta cognitiva resulta efectiva en distintos ámbitos matemáticos, surge la necesidad de trasladar dichos beneficios al estudio del Álgebra Lineal en el espacio. En consonancia con esta perspectiva, el propósito de la investigación fue analizar el impacto del ABP, apoyado en la utilización de GeoGebra, sobre la comprensión conceptual de los vectores en  $\mathbb{R}^3$  y el desempeño educativo de los estudiantes de Álgebra Lineal en la carrera de Ingeniería Civil. El objetivo central consiste en determinar si esta propuesta pedagógica contribuye a superar las limitaciones vinculadas al formalismo y a la visualización, con el fin de fortalecer en los futuros ingenieros las competencias espaciales necesarias para su ejercicio profesional. Asimismo, el estudio se estructura para presentar la metodología cuasi-experimental aplicada, los resultados cuantitativos obtenidos y un análisis detallado acerca del papel de la mediación tecnológica en la promoción de un aprendizaje significativo. Los hallazgos buscan aportar evidencia empírica que sirva como referencia para la innovación curricular en programas de ingeniería.

El objetivo del presente estudio fue evaluar el efecto del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) mediado por GeoGebra sobre la comprensión conceptual de los vectores en  $\mathbb{R}^3$  y el nivel de logro de aprendizaje académico en estudiantes de Ingeniería Civil.

## **Material y métodos**

### **Población y Muestra**

La población considerada en este estudio estuvo conformada por 28 estudiantes (24 hombres y 4 mujeres) inscritos en la asignatura de Álgebra Lineal en la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL). Cinco de ellos fueron excluidos del análisis por no completar alguna fase de evaluación, consolidándose de esta manera en una muestra final de 23 participantes ( $n=23$ ) que realizaron íntegramente el pre-test y el post-test. Esta decisión metodológica garantiza que los resultados reflejen la experiencia de quienes participaron en toda la intervención, lo cual fortaleció la validez interna del estudio.

El tamaño de la muestra responde a la naturaleza de los grupos intactos propios de la educación técnica superior. Tal como señalan Creswell y Creswell (2018) y Latorre et al. (2005), en



investigaciones de innovación docente y en contextos de aula real, el rigor científico no depende de la amplitud poblacional, sino de la validez interna y del seguimiento detallado de los procesos. Al emplear un diseño de medidas repetidas, cada estudiante funciona como su propio control, lo que incrementa la potencia estadística y permite obtener resultados significativos y transferibles a escenarios educativos similares.

### **Instrumentos y Recursos Tecnológicos**

Para evaluar el dominio cognitivo de los vectores en  $\mathbb{R}^3$ , se aplicó un cuestionario estructurado mediante la plataforma Google Forms. La construcción de este instrumento partió de un banco inicial de 40 reactivos, diseñado cuidadosamente para cubrir los aspectos conceptuales y procedimentales más relevantes. Posteriormente, se llevó a cabo un proceso de validación por juicio de expertos, en el que participaron cuatro profesionales especializados en el área de investigación. Ellos revisaron cada ítem atendiendo a criterios de pertinencia, coherencia y claridad, lo que permitió depurar el cuestionario y asegurar que las preguntas reflejaran de manera precisa los objetivos de la evaluación.

Tras el proceso de validación y revisión, se seleccionaron únicamente aquellas preguntas que guardaban una relación clara con las competencias de visualización espacial que se pretendían desarrollar. El instrumento final quedó integrado por 15 reactivos organizados en tres fases: un pretest con 5 preguntas de opción múltiple, orientadas a establecer el nivel inicial de conocimientos sobre vectores; un postest con 5 preguntas de opción múltiple de dificultad similar, diseñado para evaluar la ganancia de aprendizaje; y una encuesta de satisfacción compuesta por 5 ítems en escala Likert, destinada a conocer la percepción de los estudiantes sobre el uso de la tecnología implementada.

Se reconoce que el número de ítems utilizados en las pruebas (5 por fase) es limitado desde el punto de vista psicométrico, lo que puede afectar la precisión en la medición de la comprensión conceptual. No obstante, esta decisión respondió a restricciones operativas del contexto educativo y a la necesidad de evitar la fatiga cognitiva en los participantes.



La confiabilidad de los cuestionarios de conocimientos se verificó mediante el coeficiente Alfa de Cronbach, estadísticamente equivalente al Kuder-Richardson 20 cuando se trata de ítems dicotómicos, aplicado sobre la muestra final emparejada ( $n=23$ ). En la evaluación diagnóstica inicial (pre-test), el valor obtenido fue  $\alpha=0.34$ , lo que indica una baja consistencia interna del instrumento, coherente con la dispersión de respuestas propia de estudiantes que aún no habían consolidado conocimientos previos en el tema. Tras la intervención pedagógica, el post-test alcanzó un  $\alpha=0.74$ . Al superar el umbral de 0.70 señalado en la literatura científica como indicador de consistencia interna aceptable del instrumento en la medición del aprendizaje adquirido, lo que permite interpretar los resultados con un nivel adecuado de fiabilidad.

Para profundizar en la tercera fase del instrumento, la encuesta de satisfacción se aplicó al finalizar las sesiones con permuna escala Likert de cinco puntos (1 = Totalmente en desacuerdo, hasta 5 = Totalmente de acuerdo). Los cinco ítems estuvieron orientados a valorar tres aspectos clave: la utilidad práctica del Aprendizaje Basado en Problemas contextualizado en el escenario de la *Misión Rescate*, la facilidad de visualización espacial en  $\mathbb{R}^3$  percibida por los estudiantes y el nivel de motivación generado frente a la resolución de este reto, en contraste con la práctica mecánica de ejercicios tradicionales.

Como recurso principal se utilizó el software GeoGebra 3D, no solo como una herramienta de graficación, sino como un entorno de geometría dinámica que favorece la exploración y el descubrimiento. Desde un enfoque constructivista, esta aplicación permitió una visualización interactiva y la manipulación de variables en tiempo real, lo que aportó mayor dinamismo al proceso de enseñanza. De esta manera, los estudiantes pudieron comprobar sus conjeturas geométricas de forma inmediata, fortaleciendo su comprensión.

Se procuró mantener un nivel de dificultad equivalente entre el pre-test y el post-test, no se realizó un análisis estadístico formal que garantice dicha equivalencia, lo cual constituye una limitación del estudio y debe considerarse en la interpretación de los resultados.



## Material y Métodos

### Diseño y Tipo de Investigación

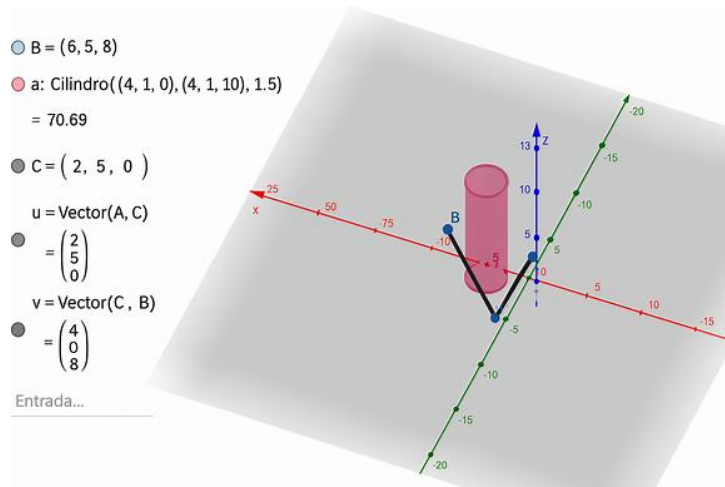
La investigación se realizó bajo un enfoque cuantitativo y se sustentó en un diseño cuasi-experimental con un solo grupo, en el cual se aplicaron evaluaciones previas (pre-test) y posteriores (post-test) a la intervención. La elección de este procedimiento metodológico respondió a la disponibilidad de un grupo ya constituido en la asignatura de Álgebra Lineal. Asimismo, el estudio se desarrolló conforme a principios éticos, garantizando la confidencialidad de la información y obteniendo el consentimiento informado de todos los participantes antes de iniciar la recolección de datos.

### Procedimiento Experimental

El procedimiento se desarrolló en dos sesiones sincrónicas mediante la plataforma Google Meet. La intervención se apoyó en la metodología de aprendizaje basado en problemas (ABP) y contó con el uso del software matemático GeoGebra como recurso complementario.

**Intervención 1 (15 de enero de 2026):** En una primera fase, se administró el instrumento de evaluación diagnóstica (pre-test) a un total de 25 asistentes. A partir de este registro, y en estricto cumplimiento con los supuestos del diseño de medidas repetidas, se consolidó la base de datos con la muestra emparejada definitiva ( $n=23$ ) para el análisis inferencial. Seguidamente, como parte central de la intervención pedagógica, se planteó a los alumnos un desafío contextualizado basado en la metodología activa ABP: *'Un dron debe trasladarse de un punto A a un punto B, pero existe un obstáculo cilíndrico en la trayectoria directa'*. El propósito de esta actividad fue generar un conflicto cognitivo que impulsara a los estudiantes a razonar analíticamente sobre la necesidad de fijar un punto auxiliar (vector de posición) para sortear dicho obstáculo. Para facilitar este proceso, se empleó el software matemático de geometría dinámica GeoGebra 3D como herramienta tecnológica cognitiva, lo cual permitió visualizar dinámicamente el espacio tridimensional y definir numéricamente cada uno de los vectores implicados, tal como se ilustra en la Figura 1.

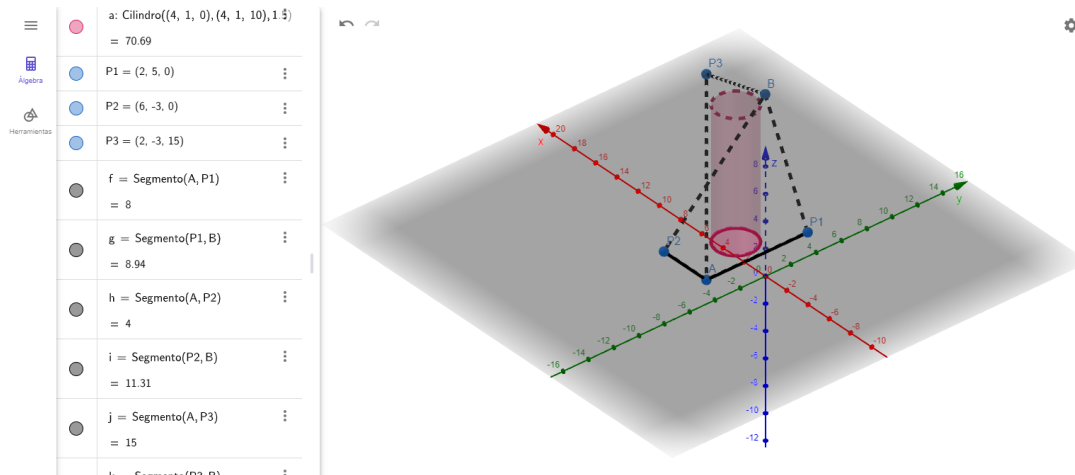
**Figura 1** Planteamiento del problema del dron y obstáculo en GeoGebra (Sesión 1)



*Nota.* Se observa la definición de los puntos A y B, el obstáculo cilíndrico y la necesidad de calcular un vector auxiliar u hacia el punto C para evitar la colisión. Fuente: Arciniega Castro (2026).

**Intervención 2 (29 de enero de 2026):** Durante esta segunda sesión, que contó con la participación de 26 estudiantes, registro a partir del cual se consolidó el emparejamiento final de  $(n=23)$ , se elevó la complejidad cognitiva del problema (ABP) mediante el planteamiento del siguiente desafío: “seleccionar el punto de escala más adecuado ( $P1, P2$  o  $P3$ ) para optimizar el consumo de combustible”. Este escenario se desarrolló bajo el supuesto de que el consumo es directamente proporcional a la distancia recorrida. La consigna exigió que los estudiantes avanzaran hacia un nivel analítico superior, en el cual aplicaron fórmulas de distancia en el plano tridimensional, ejecutaron operaciones vectoriales y calcularon módulos matemáticos para comparar objetivamente las trayectorias posibles. El modelado de la actividad y su resolución gráfica interactiva se detallan en la Figura 2.

**Figura 2** Análisis de trayectorias óptimas y cálculo de distancias en  $R^3$  (Sesión 2)



*Nota.* Visualización de las múltiples rutas posibles (segmentos f, g, h, i, j, k) y sus respectivas longitudes calculadas dinámicamente para la toma de decisiones en el contexto. Fuente: Arciniega Castro (2026).

## Resultados

### Análisis Descriptivo de los logros de aprendizaje

Para evaluar el impacto de la intervención pedagógica mediada por GeoGebra y enmarcada en las metodologías activas, se analizaron las calificaciones de la muestra de estudio ( $n=23$ ) antes y después del proceso. La Tabla 1 consolida los estadísticos descriptivos, donde se evidencia un incremento en la media aritmética de 8.09 a 9.65 sobre 10 puntos posibles. Además, la reducción en la desviación estándar (de 2.13 a 1.30) indica una mayor homogeneidad en el nivel de conocimientos alcanzado por el grupo, logrando mitigar el rezago académico de los puntajes más bajos observados en el pre-test (Tabla 1).

**Tabla 1.***Estadísticos descriptivos de los logros de aprendizaje*

---

Variable	Media ( $\bar{x}$ )	Mediana	Desv. Estándar ( $\sigma$ )	Mínimo	Máximo
Pre-test	8.09	8.00	2.13	2.00	10.00
Post-test	9.65	10.00	1.30	4.00	10.00
Diferencia ( $\Delta$ )	+1.56	+2.00	-0.83	+2.00	0.00

---

*Nota.* Resultados obtenidos a partir de las calificaciones del pre-test y post-test aplicados a los estudiantes de Ingeniería Civil ( $n = 23$ ).

### Prueba de Hipótesis y Análisis Inferencial

**Tabla 2.***Resultados de las Pruebas de Normalidad y de Rangos con Signo de Wilcoxon*

---

Prueba Estadística	Estadístico (W)	Valor $p$ (Sig. asintótica)	Decisión
Shapiro-Wilk (Normalidad)	0.863	0.004	Los datos no siguen distribución normal.
Wilcoxon (Post-test vs Pre-test)	8.000	0.012	Se rechaza $H_0$ . El cambio es significativo.

---

*Nota.*  $W$  indica el estadístico de prueba. Un valor  $p < 0.05$  denota significancia estadística. El resultado de Shapiro-Wilk justifica el uso de estadística no paramétrica, mientras que Wilcoxon confirma la diferencia significativa entre las mediciones.



### Factor de Ganancia de Aprendizaje (Índice de Hake)

**Tabla 3.**

*Análisis de Ganancia Relativa de Hake (g)*

Grupo de Estudio	Promedio Pre (%)	Promedio Post (%)	Ganancia de Hake (g)	Nivel de Eficacia
Estudiantes (n=23)	80.9%	96.5%	0.82	Alta

*Nota.* El cálculo de la ganancia relativa de Hake (g) se realizó sobre la muestra de estudiantes de Ingeniería Civil (n = 23). En la investigación educativa en ciencias, valores de  $g > 0.70$  se consideran de “Alta Ganancia” (Hake, 1998).

### Rendimiento por Dimensión Cognitiva y Espacial en $\mathbb{R}^3$

**Tabla 4.**

*Rendimiento cognitivo por dominio de la Geometría en  $\mathbb{R}^3$  (%)*

Dimensión / Concepto Evaluado	Aciertos Pre-test	Aciertos Post-test	Incremento ( $\Delta$ )
Vectores de Desplazamiento	65.2%	95.6%	+30.4%
Coordenadas y Regla de la Mano Derecha	80.4%	95.6%	+15.2%
Proyecciones Ortogonales (Planos en 3D)	86.9%	100.0%	+13.1%
Cálculo de Magnitudes y Módulos	91.3%	95.6%	+4.3%

*Nota.* Los porcentajes corresponden al rendimiento cognitivo obtenido en el pre-test y post-test de la muestra (n = 23).



---

**Percepción y Satisfacción Estudiantil****Tabla 5**

*Resultados de la encuesta de satisfacción sobre el Aprendizaje Basado en Problemas y el uso de GeoGebra*

---

<b>Ítem</b>	<b>Totalmente en desacuerdo</b>	<b>En desacuerdo</b>	<b>Neutral</b>	<b>De acuerdo</b>	<b>Totalmente de acuerdo</b>
1. El problema de la 'Misión Rescate' me ayudó a entender para qué sirven los vectores en la vida real, más allá de las fórmulas teóricas.	17.4 %	0.0 %	0.0 %	73.9 %	8.7 %
2. Trabajar con el escenario del dron y el espacio 3D me facilitó visualizar los ejes x, y, z mejor que si solo los hubiera visto dibujados en la pizarra.	17.4 %	0.0 %	4.3 %	34.8 %	43.5 %
3. Me sentí más motivado/a y atento/a resolviendo el reto del rescate que en una clase tradicional de dictado y ejercicios mecánicos.	17.4 %	0.0 %	4.4 %	56.5 %	21.7 %
4. Sentí que fui capaz de construir mi propio conocimiento al buscar la solución del problema, en lugar de solo memorizar lo que dice el profesor.	13.0 %	4.4 %	8.7 %	47.8 %	26.1 %
5. Me gustaría que se utilicen métodos similares basados en problemas reales para enseñar otros temas de matemáticas en el futuro.	13.0 %	4.4 %	13 %	52.2 %	17.4 %

---



*Nota.* Los valores representan el porcentaje de estudiantes que seleccionó cada opción de respuesta ( $n = 23$ ).

## Análisis de los Resultados

El análisis cuantitativo sugiere una mejora estadísticamente significativa en el nivel de logro de los estudiantes tras la intervención mediada por GeoGebra 3D. De acuerdo con los estadísticos descriptivos (Tabla 1), la media grupal experimentó un incremento de 8.09 en el pretest a 9.65 en el posttest sobre 10 puntos, acompañado de una reducción en la desviación estándar de 2.13 a 1.30, lo que denota una mayor homogeneidad y consolidación del aprendizaje en la muestra. El análisis inferencial realizado mediante la prueba de rangos con signo de Wilcoxon mostró una diferencia estadísticamente significativa entre el pre-test y el post-test ( $p = 0.012$ ;  $p < 0.05$ ), lo que permitió rechazar la hipótesis nula (tabla 2). Este hallazgo sugiere que la intervención aplicada se relaciona con una mejora en el aprendizaje alcanzado de los estudiantes. Además, se calculó el tamaño del efecto a través del coeficiente  $r$ , obteniéndose un valor aproximado de 0.52, lo que corresponde a una magnitud moderada-alta. En consecuencia, la mejora observada no solo alcanza significancia estadística, sino que también posee una relevancia práctica considerable.

La efectividad intrínseca de la secuencia queda demostrada al alcanzar un factor de ganancia relativa de Hake ( $g$ ) de 0.82 (Tabla 3), ubicándose sólidamente en la zona de eficacia "alta". Finalmente, el desglose de los resultados por dimensión cognitiva (Tabla 4) revela que la comprensión fue transversal, destacando el dominio total (100 %) en proyecciones ortogonales y un incremento drástico del 30.4 % de aciertos en vectores de desplazamiento.

Los resultados de la encuesta de satisfacción muestran una valoración positiva de la metodología. En el ítem sobre la utilidad del problema "Misión Rescate", el 82.6 % de los estudiantes reconoció que les ayudó a comprender la aplicación real de los vectores más allá de las fórmulas. Respecto al escenario del dron en 3D, el 78.3 % manifestó que facilitó la visualización de los ejes cartesianos frente al dibujo en pizarra. En cuanto a la motivación, el 78.2 % indicó sentirse más atento y motivado con el reto que en una clase tradicional. Asimismo, el 73.9 % consideró que la estrategia les permitió construir su propio conocimiento en lugar de limitarse a memorizar. Finalmente, el



69.6 % expresó interés en que se utilicen métodos similares basados en problemas reales para otros temas de matemáticas.

## Discusión

Los hallazgos obtenidos confirman que la integración del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), acompañado de herramientas de visualización dinámica, contribuyó de manera significativa a la comprensión de los conceptos de Álgebra Lineal. El incremento comprobado en el rendimiento académico, sustentado en la ganancia de Hake, respalda la efectividad de la intervención aplicada en el curso del Dr. Delgado. Estos resultados se alinean con lo reportado en metaestudios previos, como los de Guo et al. (2021) y Sari et al. (2022).

Un aspecto de coincidencia relevante con la literatura es la superación empírica del denominado “obstáculo del formalismo” (Dorier, 2002). La intervención muestra que la principal dificultad al trabajar con vectores en  $R^3$  no se encuentra en los procedimientos algorítmicos, sino en la limitada capacidad de visualización espacial. En este sentido, GeoGebra 3D actuó como una auténtica “prótesis cognitiva” (Dron, 2023), al permitir que los estudiantes liberaran parte de la carga mental y trascendieran la representación estrictamente matemática. De igual manera, la actividad orientada al análisis de rutas del dron ofreció un contexto aplicado propio de la ingeniería, lo que favoreció la concreción y apropiación de conceptos matemáticos abstractos, en línea con la idea de “reificación” planteada por Trigueros (2022).

La disminución en la dispersión estadística observada en los resultados del post-test sugiere que la visualización dinámica actúa como un verdadero “*ecualizador cognitivo*”. Este recurso permitió que estudiantes con distintos niveles iniciales de habilidad espacial alcanzaran la competencia esperada, cerrando las brechas de aprendizaje que se evidenciaban al inicio.

En concordancia con los avances cognitivos alcanzados, los resultados de la encuesta de satisfacción refuerzan los hallazgos cuantitativos sobre el desempeño estudiantil. La amplia aceptación de la estrategia pedagógica indica que la contextualización del problema geométrico mediante el Aprendizaje Basado en Problemas no solo elevó la motivación estudiantil (con un 78.3 % de respuestas favorables), sino que también impulsó una construcción activa del conocimiento.



El empleo de GeoGebra se consolidó como un andamiaje cognitivo eficaz para superar las dificultades históricas de visualización en  $\mathbb{R}^3$ , comúnmente presentes en los estudiantes de Ingeniería Civil.

Por otra parte, resulta pertinente señalar que una fracción minoritaria de estudiantes (entre el 13.0 % y el 17.4 %) expresó una valoración desfavorable respecto a la metodología. Este hecho pone de manifiesto la presencia de un sector que muestra resistencia frente a la transición hacia enfoques activos de aprendizaje, manteniendo preferencia por modelos tradicionales de enseñanza. También puede interpretarse como una necesidad de contar con un acompañamiento técnico y pedagógico más sólido durante las fases iniciales de adaptación a entornos educativos mediados por tecnología.

Estos resultados deben comprenderse dentro del marco de estudios exploratorios en innovación educativa. Al tratarse de un diseño cuasi-experimental, los hallazgos apuntan más a la identificación de tendencias positivas en la comprensión espacial y en el logro de aprendizajes que a la formulación de conclusiones definitivas, lo cual abre la posibilidad de futuras verificaciones empíricas.

## Conclusiones

El estudio demuestra que el Aprendizaje Basado en Problemas apoyado en GeoGebra 3D constituye una alternativa pedagógica eficaz para mejorar la comprensión de los vectores en  $\mathbb{R}^3$  y aumentar los niveles de aprobación en Álgebra Lineal. El incremento en la media grupal (de 8.09 a 9.65) y la reducción de la tasa de reprobación (del 40 % al 3.7 %) ponen de manifiesto que esta metodología activa ayuda a superar las limitaciones del formalismo algebraico y fortalece las competencias espaciales necesarias en la formación de ingenieros civiles.

La ganancia relativa de Hake ( $g=0.82$ ) confirma un impacto positivo en la consolidación del aprendizaje, reflejado en avances concretos como el aumento del 30.4 % en la comprensión de vectores de desplazamiento y del 15.2 % en la aplicación de la regla de la mano derecha.

La percepción estudiantil refuerza estos resultados: más del 70 % de los participantes valoró la propuesta, destacando su utilidad práctica, el incremento en la motivación y la posibilidad de



construir conocimiento propio. Este consenso sugiere que la integración de problemas contextualizados con herramientas de visualización dinámica favorece un aprendizaje más profundo y puede contribuir a la permanencia estudiantil en ciencias exactas.

Es necesario reconocer las limitaciones del estudio: la aplicación en un grupo intacto, la ausencia de un grupo de control paralelo y el número reducido de ítems en los instrumentos de evaluación invitan a interpretar los resultados como evidencia prometedora más que como conclusiones generalizables. Además, en la encuesta de satisfacción se debe considerar la posibilidad de sesgos de deseabilidad social.

De cara al futuro, resulta pertinente replicar esta experiencia en cohortes más amplias, incorporar grupos de control y ampliar los instrumentos de evaluación para fortalecer la validez de los hallazgos. También se recomienda impulsar estudios longitudinales que permitan analizar la sostenibilidad del aprendizaje y su transferencia hacia asignaturas profesionalizantes como física, estática y análisis estructural.

En síntesis, la investigación aporta evidencia consistente que indica que la combinación de ABP y GeoGebra 3D es una estrategia metodológica viable y efectiva para enfrentar los retos de la enseñanza matemática en el espacio tridimensional.

## Referencias bibliográficas

American Society of Civil Engineers. (2022). *Minimum design loads and associated criteria for buildings and other structures* (ASCE/SEI 7-22).

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Siglo XXI Editores.

Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem-based learning methods. *Medical Education*, 20(6), 481–486.

Bouhjar, M., El Hajjami, A., & El Hajjami, A. (2021). Difficulties in learning linear algebra in engineering education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(4), 567–583. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254>.



- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5.<sup>a</sup> ed.). SAGE Publications.
- Dorier, J. L. (2002). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.
- Dron, J. (2023). Educational technology: What it is and how it works. *AI & Society*, 38(1), 1–15. <https://doi.org/10.1007/s00146-022-01439-4>.
- Gómez, R., & Pérez, L. (2024). Teaching challenges in linear algebra for engineering students. *Journal of Mathematics Education*, 15(1), 45–62.
- Guo, X., Wang, M., & Li, X. (2021). The effectiveness of problem-based learning on the academic achievement and critical thinking skills of higher education students: A meta-analysis. *International Journal of Educational Research*, 107, 101755. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101755>.
- Guzmán, J., & Zambrano, J. (2014). Dificultades inherentes en el aprendizaje de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en  $R^2$  y  $R^3$  usando software dinámico. *Revista AMIUTEM*, 2(2), 20–30.
- Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66(1), 64–74. <https://doi.org/10.1119/1.18809>.
- Jonassen, D. H. (2000). *Computers as mindtools for schools: Engaging critical thinking* (2.<sup>a</sup> ed.). Prentice Hall.
- Latorre, A., del Rincón, D., & Arnal, J. (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Ediciones Experiencia.
- Mendoza, J., & Valdés, P. (2023). Systematic review of active methodologies in engineering mathematics education. *Revista Educación Matemática*, 35(2), 77–95.
- Mora, G. A., & Jaramillo, C. P. (2023). Causas y consecuencias de la deserción en la educación superior en Ecuador: Una revisión sistemática. *Revista Científica Multidisciplinar Ciencia Latina*, 7(4), 1–18. <https://doi.org/10.37896/clij.2023.74.1>.
- Sari, D. R., Zulkardi, Z., & Darmawijoyo, D. (2022). The effect of problem-based learning on students' mathematical problem-solving ability in higher education: A meta-analysis. *Journal of Physics: Conference Series*, 2157(1), 012028. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2157/1/012028>.



Stewart, J., Can, M., & Lee, H. (2022). Formalism obstacles in learning vector spaces: A cognitive perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 215–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10073-9>.

Trigueros, M. (2022). Challenges in the learning of linear algebra. En M. Danesi (Ed.), *Handbook of cognitive mathematics* (pp. 1–21). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7\\_4-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-44982-7_4-1).

**Conflicto de intereses:**

El autor declara que no existe conflicto de interés posible.

**Agradecimiento:**

Dr. José Delgado

**Financiamiento:**

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

**Nota:**

El artículo no es producto de una publicación anterior.