



Doi: <https://doi.org/10.70577/asce.v5i2.839>

**Recibido:** 2026-04-27

**Aceptado:** 2026-05-05

**Publicado:** 2026-05-19

## **Gamificación para la enseñanza de racionalización: Diseño y fundamentación de una propuesta didáctica innovadora**

### **Gamification for teaching rationalization: Design and justification of an innovative didactic proposal**

#### **Autores**

**Ramón Antonio Abancín Ospina**<sup>1</sup>

Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática

[ramon.abancin@esPOCH.edu.ec](mailto:ramon.abancin@esPOCH.edu.ec)

<https://orcid.org/0000-0002-2417-6671>

**Escuela Superior Politécnica de Chimborazo  
(ESPOCH)**

**Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez  
(UNERS)**

Riobamba – Ecuador

**Andrés Eloy Salazar Domínguez**<sup>2</sup>

[andres.salazar.d@uev.ve](mailto:andres.salazar.d@uev.ve)

<https://orcid.org/0000-0001-7310-2241>

**Universidad Central de Venezuela (UCV)  
Universidad Nacional Experimental Simón  
Rodríguez (UNERS)**

Caracas – Venezuela

**Lourdes Emperatriz Paredes Castelo**<sup>3</sup>

Facultad de Salud Pública

[lparedes@esPOCH.edu.ec](mailto:lparedes@esPOCH.edu.ec)

<https://orcid.org/0000-0002-5331-2759>

**Escuela Superior Politécnica de Chimborazo  
(ESPOCH)**

Riobamba – Ecuador

**Carlos Eduardo Cova Salaya**<sup>4</sup>

Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática

[carlos.cova@esPOCH.edu.ec](mailto:carlos.cova@esPOCH.edu.ec)

<https://orcid.org/0009-0003-8232-6206>

**Escuela Superior Politécnica de Chimborazo  
(ESPOCH)**

Riobamba – Ecuador

#### **Como Citar**

Abancín Ospina. R. A. &, Paredes Castelo. L. E. &, Cova Salaya. C. E. &, Salazar Domínguez. A. E. (2026) Gamificación para la enseñanza de racionalización: Diseño y fundamentación de una propuesta didáctica innovadora. 5(2) 1495-1527.



## Resumen

La enseñanza de la racionalización de monomios enfrenta obstáculos cognitivos documentados, como la mecanización sin significado, dificultades con propiedades de radicales y potencias, y ansiedad matemática, lo que motiva la búsqueda de estrategias didácticas innovadoras que promuevan un aprendizaje significativo. La presente investigación tuvo como propósito diseñar teóricamente una propuesta didáctica basada en gamificación para la enseñanza de esta temática. Desde un enfoque cualitativo basado en diseño, se realizó una revisión de la literatura sobre gamificación en educación matemática, se analizaron los conceptos implicados en la racionalización y los obstáculos cognitivos asociados, y se fundamentó la propuesta en las teorías del constructivismo, conectivismo y sociocultural. Los principales resultados incluyen la identificación de seis conceptos matemáticos fundamentales, seis categorías de obstáculos cognitivos, cuatro principios de gamificación aplicables (atención, relevancia, confianza y satisfacción), y tres niveles de elementos de juego (mecánicas, dinámicas y componentes estéticos). Con base en estos hallazgos, se diseñó “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”, una propuesta estructurada en cinco niveles progresivos que integra narrativa, puntos, insignias, potenciadores y un desafío final. Se concluye que la propuesta constituye una herramienta versátil y teóricamente fundamentada para transformar el aprendizaje de la racionalización en una experiencia motivadora.

**Palabras clave:** Gamificación, Racionalización, Enseñanza de matemáticas, Didáctica del álgebra, Propuesta didáctica innovadora, Motivación escolar.



## Abstract

Teaching the rationalization of monomials faces documented cognitive obstacles, such as rote memorization, difficulties with the properties of radicals and powers, and math anxiety, which motivates the search for innovative teaching strategies that promote meaningful learning. The purpose of this research was to theoretically design a didactic proposal based on gamification for teaching this topic. Using a qualitative design-based approach, a literature review on gamification in mathematics education was conducted, the concepts involved in rationalization and the associated cognitive obstacles were analyzed, and the proposal was grounded in constructivist, connectivist, and sociocultural theories. The main results include the identification of six fundamental mathematical concepts, six categories of cognitive obstacles, four applicable gamification principles (attention, relevance, trust, and satisfaction), and three levels of game elements (mechanics, dynamics, and aesthetic components). Based on these findings, “Rational Quest: The League of Radicals” was designed, a proposal structured in five progressive levels that integrates narrative, points, badges, boosters, and a final challenge. It is concluded that the proposal constitutes a versatile and theoretically sound tool for transforming the learning of rationalization into a motivating experience.

**Keywords:** Gamification, Rationalization, Teaching mathematics, Didactics of algebra, Innovative didactic proposal, School motivation.

## Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha enfrentado históricamente un desafío que ninguna otra área del conocimiento parece experimentar con la misma intensidad. Específicamente, la resistencia o rechazo generalizado de los estudiantes hacia disciplinas percibidas como abstractas, inaccesibles y carentes de significado práctico (Hanus & Fox, 2015). Esta desafección no es un fenómeno menor, sino una problemática que trasciende fronteras y niveles educativos, manifestándose en altos índices de ansiedad matemática, desmotivación crónica y un preocupante abandono de trayectorias formativas vinculadas a ciencias e ingeniería, entre otras.

En este contexto de urgencia educativa, un tópico particularmente sensible dentro de los currículos o programas relacionados con el área de matemáticas resalta el tema de racionalización de expresiones algebraicas. En el cual, su estudio involucra contenidos fundamentales como lo son: los números irracionales, propiedades de potencias con exponente fraccionario, identificación del factor racionalizante y equivalencia de expresiones algebraicas. Donde, la complejidad inherente a estos conceptos y propiedades, sumada a la tradicional enseñanza mecanizada que privilegia la repetición algorítmica sobre la comprensión significativa, ha generado obstáculos cognitivos bien documentados en la literatura científica.

Concretamente, se puede resaltar: a) comprensión limitada de los números irracionales, b) dificultades con las propiedades de raíces y potencias, c) tendencia a la mecanización sin significado, d) errores sistemáticos en la manipulación algebraica, e) una profunda desconexión entre el procedimiento de racionalización y f) sus aplicaciones posteriores en límites, derivadas o números complejos (Sfard, 1991; Kieran, 2007).

Con respecto a este panorama, la gamificación ha emergido en las últimas dos décadas como una estrategia pedagógica prometedora para abordar los problemas de motivación y compromiso en el aprendizaje de matemáticas. Específicamente, la gamificación es definida como la integración de elementos correspondientes al diseño de juegos —puntos, niveles, insignias, tablas de clasificación, narrativas, sistemas de progresión y retroalimentación instantánea— en entornos no lúdicos (Deterding *et al.*, 2011). En este sentido, la gamificación ha demostrado tener el potencial de transformar la experiencia educativa, para convertir tareas que tradicionalmente generan frustración en desafíos atractivos y significativos.

Con respecto a la literatura, a modo de ilustración se pueden mencionar: una revisión

sistemática y metaanálisis que examinó 45 estudios sobre gamificación en matemáticas en niveles de secundaria y educación superior, encontró un efecto positivo pequeño a moderado sobre la motivación de los estudiantes ( $g = .383$ ). Esto evidencia que la gamificación apoya tanto la motivación como el compromiso cuando los diseños se alinean con las necesidades de los estudiantes, lo cual equilibra la competencia con el dominio y la cooperación (Bai *et al.*, 2020).

Adicionalmente, otras investigaciones específicas han documentado experiencias exitosas en áreas como el álgebra elemental (Kalogiannakis *et al.*, 2021), geometría (Sun & Hsieh, 2018) y resolución de problemas matemáticos (Kuo & Chuang, 2016), donde la incorporación de elementos lúdicos ha contribuido a mejorar no solo el rendimiento académico, sino también las actitudes hacia las matemáticas y la persistencia frente a tareas desafiantes.

En este sentido, estos trabajos y muchos otros disponibles en la literatura a partir de sus experiencias y hallazgos, fueron el punto de partida que permitieron entramar un andamiaje de contenidos matemáticos con elementos propios de la gamificación (de juegos) para cristalizar la propuesta que se exhibe en la presente investigación. Además, de servir de respaldo teórico y empírico para la articulación de ambas áreas con miras a optimizar la enseñanza de las matemáticas.

No obstante, a pesar de estos avances significativos, la investigación sobre gamificación en educación matemática presenta vacíos notables que justifican la necesidad de nuevas contribuciones. En primer lugar, los estudios existentes se han centrado predominantemente en el uso de elementos de juego basados en el rendimiento —puntos y tablas de clasificación—, mientras que el potencial de las dinámicas narrativas, la progresión inmersiva y los sistemas de recompensa simbólica ha sido considerablemente menos explorado (Koivisto & Hamari, 2019).

En segundo lugar, y más relevante para este estudio, no se ha encontrado en la literatura revisada ninguna investigación que diseñe, implemente y evalúe una propuesta gamificada específicamente orientada a la enseñanza de la racionalización de monomios. Este vacío es particularmente llamativo si se considera que la racionalización concentra muchas de las dificultades que la gamificación puede abordar eficazmente. Esto se debe a que, es un procedimiento que combina múltiples conceptos abstractos, requiere práctica deliberada pero no mecánica, y carece frecuentemente de conexiones significativas con contextos cercanos al estudiante.

Tercero, tampoco se ha documentado en la literatura una propuesta que integre de manera

sistemática los tres niveles de diseño gamificado —mecánicas (puntos, niveles, clasificaciones), dinámicas (progresión, competición, colaboración) y componentes estéticos (narrativa, avatares, ambientación)— en un entorno de aprendizaje de racionalización, ni que fundamente dicha propuesta en las teorías del aprendizaje que sustentan la gamificación, a saber, el constructivismo, el conectivismo y la teoría sociocultural de Vigotsky.

Dentro del contexto anterior, el propósito fue abordar este vacío mediante el diseño y la fundamentación teórica de una propuesta didáctica innovadora denominada “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”, una experiencia gamificada para la enseñanza de la racionalización de monomios dirigida a estudiantes de educación secundaria. La propuesta se estructura en torno a una narrativa fantástica —El Reino de Numeria, amenazado por los Radicales Oscuros— que sirve como vehículo para que los estudiantes avancen por cinco niveles de dominio (Aprendiz, Racionalizador, Experto, Maestro y Leyenda), acumulen puntos de experiencia, obtengan insignias por logros específicos, utilicen potenciadores estratégicos y culminen su aprendizaje con el enfrentamiento de un desafío final que integra todos los conocimientos adquiridos.

El diseño incorpora elementos de gamificación en sus tres dimensiones constitutivas —mecánicas (progresión por niveles, puntos de experiencia, clasificaciones, restricciones), dinámicas (progresión, competición, colaboración, descubrimiento) y componentes estéticos (avatares, narrativa, insignias, potenciadores<sup>1</sup>)—, y se fundamenta explícitamente en las teorías del aprendizaje constructivista, conectivista y sociocultural. En base a todo lo expuesto, la justificación de esta investigación radica en la necesidad de aportar al campo de la educación matemática una propuesta didáctica que, por un lado, responda a los problemas documentados de motivación y comprensión significativa en el aprendizaje de la racionalización y, por otro lado, ofrezca a los profesores un modelo de intervención gamificada sistemática, fundamentada y adaptable a diferentes contextos educativos. Concretamente, aprovechando que la gamificación está siendo promovida como una estrategia innovadora, pero no siempre acompañada de un diseño pedagógicamente sólido ni de una fundamentación teórica explícita, este estudio propone contribuir con un ejemplo detallado de cómo integrar los principios del diseño de juegos con las teorías del aprendizaje y las particularidades de un contenido matemático específico (Racionalización de monomios).

Mientras que, la importancia de la investigación propuesta trasciende el ámbito estrictamente académico, puesto que ofrece una herramienta concreta para que los profesores de matemáticas puedan transformar una de los temas que, tradicionalmente genera mayores dificultades y desmotivación en una experiencia de aprendizaje atractiva, significativa y potencialmente transformadora de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Asimismo, la propuesta puede servir como modelo para el diseño gamificado de otros temas dentro del currículo matemático. Lo que contribuye a la necesaria renovación metodológica de la enseñanza de álgebra y, más ampliamente, de la educación matemática en su conjunto.

## Material y métodos

En esta sección se detallan los materiales y enfoque metodológico utilizado para alcanzar los objetivos propuestos en la presente investigación, centrada en el diseño y fundamentación de una propuesta didáctica innovadora basada en gamificación para la enseñanza de la racionalización de monomios.

### Materiales

Los materiales utilizados para la realización de este artículo se organizan en tres categorías: Recursos bibliográficos, digitales y documentales. A continuación, se detallan brevemente cada uno de estos.

R<sub>1</sub>) *Recursos bibliográficos*: Se utilizó una colección de fuentes académicas especializadas en las siguientes áreas de conocimiento: gamificación y diseño de juegos aplicados a la educación, teorías del aprendizaje (constructivismo, conectivismo y teoría sociocultural), didáctica de la matemática específicamente orientada a la racionalización y metodologías activas de enseñanza.

R<sub>2</sub>) *Recursos digitales*: Se emplearon bases de datos académicas para la búsqueda y recuperación de literatura científica, incluyendo *Scopus*, *Web of Science*, *Google Scholar* y ERIC (*Education Resources Information Center*). Adicionalmente, se utilizaron gestores bibliográficos (*Zotero* y *Mendeley*) para la organización, almacenamiento y citación de las referencias recuperadas.

R<sub>3</sub>) *Recursos documentales*: Se elaboraron instrumentos de análisis documental para la presente investigación, donde se incluye una matriz de categorización de elementos de gamificación (mecánicas, dinámicas y componentes estéticos) basada en la taxonomía

propuesta por Werbach & Hunter (2012) y Hunicke *et al.* (2004), así como una plantilla para el registro de obstáculos cognitivos documentados en la enseñanza de la racionalización, organizada según las categorías identificadas por Kieran (2007) y Sfard (1991).

### **Métodos**

El enfoque metodológico adoptado en esta investigación es de carácter cualitativo, específicamente un estudio de desarrollo didáctico basado en el diseño y fundamentación teórica. Este enfoque, ampliamente documentado en la literatura de investigación educativa por autores como Collins *et al.* (2004) y Wang & Hannafin (2005), se caracteriza por la elaboración de propuestas didácticas innovadoras fundamentadas en teorías del aprendizaje y en el análisis de necesidades educativas específicas, con la finalidad de generar conocimiento transferible a la práctica educativa. Específicamente, el desarrollo metodológico se estructuró en las siguientes fases:

F<sub>1</sub>) *Revisión de la literatura*: Se realizó una revisión de la literatura científica sobre gamificación en educación matemática, donde se siguieron los principios metodológicos establecidos por Kitchenham y Charters (2007). El proceso incluyó: a) definición de una pregunta de investigación; b) búsqueda en las bases de datos mencionadas utilizando cadenas de búsqueda; c) aplicación de criterios de inclusión (artículos publicados en revistas indexadas entre 2010 y 2025, escritos en inglés o español, que abordaran explícitamente la gamificación en contextos educativos de matemáticas) y exclusión (estudios centrados exclusivamente en juegos serios sin elementos de gamificación, trabajos no empíricos sin fundamentación teórica); d) extracción y síntesis de datos mediante una matriz de categorización previamente diseñada.

F<sub>2</sub>) *Análisis de los conceptos matemáticos implicados en la racionalización de monomios*: Se realizó una indagación epistemológica y didáctica de los conceptos matemáticos involucrados en el proceso de racionalización de monomios. Este proceso, basado en las propuestas metodológicas de Godino & Batanero (1994) sobre el análisis de idoneidad didáctica, permitió identificar y desglosar los componentes conceptuales fundamentales: números irracionales y radicales, propiedades de las raíces, potencias de exponente fraccionario, factor racionalizante, equivalencia de expresiones algebraicas y operaciones con radicales. Cada concepto fue analizado en términos de sus definiciones formales, propiedades estructurales y relaciones jerárquicas, así como su secuenciación didáctica óptima para el aprendizaje progresivo.

F<sub>3</sub>) *Identificación y categorización de obstáculos cognitivos*: Se realizó una revisión de la literatura especializada en didáctica del álgebra para identificar los obstáculos cognitivos documentados en el aprendizaje de la racionalización y de conceptos afines (radicales, potencias fraccionarias, manipulación algebraica). A partir del marco teórico de los obstáculos epistemológicos propuesto por Brousseau (1983) y ampliado por Sfard (1991) en el contexto del pensamiento algebraico, se clasificaron las dificultades en: a) obstáculos ontogénicos (relacionados con el nivel de desarrollo cognitivo del estudiante), b) obstáculos didácticos (derivados de las prácticas de enseñanza tradicionales), y c) obstáculos epistemológicos (inherentes a la naturaleza misma del conocimiento matemático implicado).

F<sub>4</sub>) *Fundamentación teórica de la gamificación*: Se sistematizaron las teorías del aprendizaje que sustentan la gamificación en contextos educativos, con énfasis en sus aplicaciones a la enseñanza matemática. Se analizaron tres marcos teóricos principales: a) el constructivismo, particularmente las contribuciones de Piaget (1970) sobre la construcción activa del conocimiento y de Jonassen (1991) sobre entornos de aprendizaje constructivistas; b) el conectivismo, según la propuesta de Siemens (2004, 2006) sobre el aprendizaje como proceso de establecimiento de conexiones; y c) la teoría sociocultural de Vigotsky (1978), con énfasis en el concepto de zona de desarrollo próximo y el papel del juego en el desarrollo cognitivo. Adicionalmente, se analizaron los elementos fundamentales de la gamificación según la taxonomía de Werbach y Hunter (2012), específicamente con respecto a mecánicas (puntos, niveles, clasificaciones, restricciones, relaciones), dinámicas (progresión, competición, colaboración, descubrimiento comunitario, influencia y estatus) y componentes estéticos (avatares, insignias, recompensas, bienes virtuales, narrativa).

F<sub>5</sub>) *Diseño de la propuesta didáctica gamificada*: Con base en los resultados de las fases anteriores, se procedió al diseño sistemático de la propuesta “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”. El proceso de diseño siguió las etapas propuestas por el modelo de diseño instruccional gamificado de Kapp (2012): a) Definición de objetivos de aprendizaje en tres dimensiones (conocimiento conceptual, habilidades procedimentales y competencias de aplicación); b) Desarrollo de la narrativa y ambientación del juego; c) Selección y adaptación de mecánicas, dinámicas y componentes; d) Estructuración de la progresión por niveles de dominio; e) Diseño del sistema de puntos, recompensas e insignias; f) Elaboración del banco de ejercicios graduados por nivel de dificultad; g)

Diseño del desafío final como instancia de evaluación integradora; h) Planificación de las adaptaciones para la atención a la diversidad.

F<sub>6</sub>) *Validación teórica y fundamentación de la propuesta*: Se realizó una validación teórica de la propuesta diseñada, contrastando cada elemento de la gamificación con los fundamentos teóricos previamente establecidos y con los objetivos de aprendizaje definidos. Esta fase incluyó la elaboración de matrices de alineación que permitieron verificar la coherencia interna de la propuesta, así como la redacción de la justificación pedagógica de cada decisión de diseño a la luz de la literatura especializada (Collins *et al.*, 2004; Wang & Hannafin, 2005).

### **Fundamentación teórica**

La presente sección establece las bases teóricas que sustentan la propuesta didáctica innovadora que se detalla en la próxima sección, para la enseñanza de racionalización mediante el uso de la gamificación. En un primer momento se aborda el marco de la gamificación, incluyendo sus principios, teorías del aprendizaje subyacentes y elementos constitutivos, para posteriormente examinar los conceptos matemáticos implicados en la racionalización y los obstáculos cognitivos documentados en su aprendizaje.

### **Gamificación: Fundamentos y aplicación en educación matemática**

#### **Principios de la gamificación aplicables a la enseñanza matemática**

La gamificación se define como una técnica de aprendizaje que traslada la mecánica de los juegos al ámbito educativo con la finalidad de conseguir mejores resultados, ya sea para comprender mejor algunos conocimientos, mejorar alguna habilidad o recompensar acciones concretas (Deterding *et al.* 2011). Este tipo de aprendizaje cada día gana terreno en las metodologías de formación debido a su carácter lúdico, facilitando la interiorización de conocimientos de una forma más divertida, generando una experiencia positiva en los estudiantes.

Los principios fundamentales de la gamificación aplicables a la enseñanza de las matemáticas, y específicamente a la racionalización, se organizan en torno a dos grandes categorías motivacionales. En primer lugar, la motivación intrínseca está relacionada con la realización de actividades por la simple satisfacción de hacerlas, sin necesidad de incentivos externos, e incluye la sensación de placer y la autosuperación (Ryan & Deci, 2000). En segundo lugar, la motivación extrínseca aparece cuando lo que atrae al individuo no es la acción en sí misma, sino lo que recibe a cambio de la actividad realizada, como recompensas sociales o reconocimiento (Ryan & Deci, 2000). Ambos

tipos de motivación son aditivos y pueden combinarse para originar un nivel de motivación elevado. Pero, la motivación extrínseca puede ser necesaria para iniciar una actividad, pero esta puede mantenerse después mediante los motivadores intrínsecos.

Para el caso concreto de la racionalización y apoyado en el Modelo ARCS (Atención, Relevancia, Confianza/Seguridad y Satisfacción) de Keller (1987) estos principios se traducen en cuatro dimensiones clave que deben orientar el diseño gamificado:

- **Atención:** puede conseguirse estimulando la curiosidad o mediante la incorporación de elementos de sorpresa o incertidumbre en la resolución de expresiones matemáticas con radicales.
- **Relevancia:** se logra con la incorporación de intereses y necesidades de los participantes, para que hagan suya la experiencia de aprendizaje matemático.
- **Confianza o seguridad:** los estudiantes deben sentirse cómodos en la resolución de la tensión cognitiva que implica la racionalización, conociendo los objetivos y requisitos previos, y recibiendo retroalimentación adecuada que les haga sentirse exitosos.
- **Satisfacción:** la experiencia debe ser gratificante, proponiendo retos asequibles a las habilidades de cada estudiante —ni demasiado fáciles ni excesivamente difíciles—.

### **Teorías del aprendizaje que sustentan el enfoque de gamificación**

La gamificación para que sea significativa dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, requiere una consistente articulación con las teorías del aprendizaje que permitan aplicar de manera vinculada y proactiva la arquitectura de los diferentes aprendizajes en los estudiantes (Kapp, 2012). Las principales teorías que sustentan este enfoque son el constructivismo, el conectivismo y la teoría sociocultural de Vigotsky.

#### **Constructivismo**

La gamificación se fundamenta de manera significativa en el constructivismo. Según Jonassen (1991), el aprendizaje debe contemplar diversas perspectivas o interpretaciones de la realidad, construcción de conocimiento y acciones fundadas en experiencias del propio contexto.

En este sentido, por un lado, el constructivismo conduce a que sea el estudiante quien construya el conocimiento por sí mismo; mientras que, con la gamificación, cada vez que el estudiante conquista un desafío y logra avanzar a otro nivel, aprende a autorregular su aprendizaje y a superar la dificultad cuando descubre las mejores acciones para dar posibles soluciones y alcanzar a la meta, cumpliendo el objetivo propuesto en cada etapa del juego.

Ahora, concretamente, la gamificación contribuye a generar un ambiente constructivista en cuanto a que (Jonassen (1991, 1994, 1999): Suministra a los estudiantes el contacto con múltiples interpretaciones de la realidad matemática; Las diversas interpretaciones evitan las reducciones e incorporan la complejidad del mundo real; Se enfocada en construir conocimiento dentro de la reproducción de el mismo; Facilita mediante simulaciones, entornos de aprendizaje como ámbitos de la vida cotidiana; y Promueve la reflexión en la experiencia y el trabajo colaborativo.

### **Conectivismo**

Desde el conectivismo, Siemens (2004) plantea que la construcción del aprendizaje se concibe como un proceso inconsciente, casual, caótico, que no puede diseñarse ni preverse, y que se debe centrar la atención, no en esa construcción, sino en las conexiones que los estudiantes establecen —conceptuales, sociales, personales, entre otros—. De esta manera, el rol del profesor no reside tanto en construir con el estudiante un conocimiento nuevo como en gestionar y facilitar las herramientas necesarias para que, en un contexto de aprendizaje puedan establecerse el mayor número de estas conexiones. Además, Siemens (2006) afirma que quien aprende debe ser capaz de identificar y establecer la importancia con respecto al grado en el cual un recurso se ajusta a las necesidades individuales. Precisar relevancia es crucial porque, si esta es determinada por quien aprende, la motivación se incrementa. Concretamente, si es el estudiante quien determina los recursos que satisfacen sus necesidades de aprendizaje, este se mostrará más dispuesto hacia los procesos de aprendizaje.

### **Teoría sociocultural de Vigotsky**

El juego, base de la gamificación, es concebido por Vigotsky (1978) como una actividad social en la cual, la cooperación de un estudiante con otros permite adquirir papeles que son complementarios del suyo propio. Esta perspectiva refuerza la importancia del componente social y colaborativo en los entornos gamificados, donde la interacción con pares se convierte en transporte para el desarrollo cognitivo.

### **Elementos fundamentales de la gamificación**

La gamificación se estructura en torno a tres categorías fundamentales que, en conjunto, configuran la experiencia de aprendizaje: mecánicas, dinámicas y componentes estéticos del juego en entornos no lúdicos (Werbach y Hunter, 2012).

## Mecánicas

Las mecánicas son las diferentes acciones, comportamientos y mecanismos de control ofrecidos al jugador dentro de un contexto de juego. Componen el armazón de la gamificación, proporcionando normas y sistemas que dirigen la interacción entre jugador y juego. Junto con el contenido del juego (por ejemplo, niveles, bienes), las mecánicas sostienen las dinámicas integrales del juego (Werbach y Hunter, 2012). En base a estos últimos autores, las mecánicas más comunes y aplicables al contexto de la racionalización son:

- Progresión: implica avanzar o mejorar a lo largo del tiempo mediante sistemas de niveles donde los participantes avanzan a medida que completan módulos de racionalización.
- Restricción: establece las condiciones para acceder a ciertos recursos o beneficios, como desbloquear ventajas después de alcanzar cierto nivel de dominio.
- Clasificación: organiza a los estudiantes participantes en categorías o listas según su desempeño mediante tablas de clasificación.
- Relación: se refiere a la conexión y colaboración entre participantes, permitiendo la formación de equipos para abordar desafíos en conjunto.

## Dinámicas

Las dinámicas son aquellas necesidades e inquietudes humanas que motivan a las personas a actuar (Werbach y Hunter, 2012). Constituyen los modelos de comportamiento y las interacciones que surgen durante la experiencia de juego. Se corresponden con conceptos abstractos que pueden ser orientados desde la pirámide de las necesidades humanas de Maslow (1943).

A partir de Werbach & Hunter (2012) y Hunicke *et al.* (2004) las dinámicas más relevantes para la enseñanza de la racionalización incluyen

- Progresión: buscar subir niveles y progresar para ganar poderes, generando fidelidad (enganche) y compromiso, elementos especialmente valiosos en educación.
- Competición: fomenta la competencia amigable entre participantes, donde compiten por logros o reconocimientos.
- Colaboración: incentiva la cooperación entre participantes para lograr objetivos comunes, como la resolución conjunta de expresiones complejas.
- Descubrimiento comunitario: trabajar en equipo para lograr una meta común, fortaleciendo la idea de grupo y pertenencia.

- Influencia y estatus: establecer niveles en función del esfuerzo o logros, permite alcanzar un estatus que identifique a los estudiantes respecto a los demás.

### **Componentes estéticos**

Los componentes estéticos de juego son principios o ideas que se introducen en el entorno gamificado para motivar al jugador (Werbach y Hunter, 2012). Constituyen las características visuales y narrativas que dan forma a la experiencia del jugador, creando un entorno atractivo y agradable que potencia la participación. A partir de Werbach & Hunter (2012) y Hunicke *et al.* 2004), entre los componentes fundamentales se encuentran:

- Avatares: representación visual del jugador dentro del entorno del juego.
- Puntos de experiencia (XP): se otorgan por completar tareas o superar desafíos. Así, acumular XP suele estar asociado con el progreso y la mejora del desempeño.
- Niveles: representan diferentes etapas de progreso en el juego. Donde, a medida que los jugadores acumulan puntos, avanzan a niveles más altos desbloqueando nuevos desafíos.
- Medallas o insignias: reconocimientos tangibles otorgados por logros específicos.
- *Rankings*: listas de clasificación de los jugadores según su desempeño para fomentar la competencia sana.
- Recompensas: incentivos tangibles o intangibles proporcionados por alcanzar ciertos objetivos.
- Bienes virtuales y potenciadores: mejoras temporales que brindan ventajas o habilidades especiales.
- Desafío final<sup>2</sup>: combates finales que integran los aprendizajes acumulados.

### **Racionalización de monomios: aspectos matemáticos y didácticos**

#### **Conceptos matemáticos implicados en la racionalización de monomios**

La racionalización es un proceso matemático que consiste en transformar una expresión con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional. En el caso específico de la racionalización de monomios, cuando el denominador es un monomio que contiene radicales, se utilizan factores racionalizantes para convertir el denominador en una expresión racional equivalente. Los conceptos matemáticos fundamentales

---

implicados en este proceso son:

- Números irracionales y radicales: comprensión de las expresiones que contienen raíces no exactas y su comportamiento algebraico.
- Propiedades de las raíces: incluyendo la raíz de un producto, raíz de un cociente y la simplificación de radicales.
- Potencias de exponente fraccionario: relación entre radicales y potencias, fundamental para comprender el factor racionalizante.
- Factor racionalizante: expresión que multiplicada por el denominador elimina el radical. Para monomios de la forma  $\sqrt[n]{a^m}$ , el factor racionalizante es  $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ , tal que  $\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^{n-m}} = a$ .
- Equivalencia de expresiones algebraicas: la multiplicación por el factor racionalizante debe realizarse tanto en el numerador como en el denominador para mantener la equivalencia de la expresión original.
- Operaciones con radicales: multiplicación y simplificación de expresiones radicales.

### **Obstáculos cognitivos documentados en el aprendizaje de la racionalización**

Aunque la literatura específica sobre obstáculos cognitivos en racionalización es limitada en los resultados de búsqueda proporcionados, es posible inferir, desde la didáctica de la matemática, las principales dificultades que enfrentan los estudiantes:

- Comprensión limitada de la naturaleza de los números irracionales: los estudiantes suelen tener dificultades para aceptar expresiones con radicales como números válidos, lo que dificulta la comprensión del propósito de la racionalización.
- Dificultades con las propiedades de las potencias y raíces: la aplicación incorrecta de propiedades o la simplificación de radicales constituye un obstáculo frecuente.
- Mecanización sin significado: los estudiantes tienden a aplicar el procedimiento de racionalización de manera mecánica, sin comprender por qué se multiplica por determinado factor o cuál es el sentido matemático de la transformación.
- Dificultad para identificar el factor racionalizante: especialmente cuando los índices de las raíces y los exponentes del radicando requieren análisis detallado.
- Errores en la manipulación algebraica: equivocaciones al multiplicar expresiones algebraicas que contienen radicales, especialmente cuando intervienen variables.
- Falta de conexión con conocimientos previos: la racionalización suele enseñarse como un procedimiento aislado, sin vincularlo suficientemente con la necesidad de

simplificar expresiones o con aplicaciones posteriores en límites, derivadas o números complejos.

- Ansiedad matemática: el aspecto simbólico de las expresiones con radicales puede generar rechazo o bloqueo emocional que dificulta el aprendizaje significativo.

Estos obstáculos justifican la necesidad de enfoques didácticos innovadores, como la gamificación, que permitan abordar las dificultades desde una perspectiva motivadora y significativa.

## Resultados

Este apartado está dedicado a exponer articuladamente los principales resultados obtenidos a través de la revisión bibliográfica minuciosa, enfocada en gamificación y racionalización, especialmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este último. Donde, concretamente se consolidó el diseño y fundamentación de una propuesta didáctica innovadora con respecto al uso de la gamificación para la enseñanza del tema racionalización. Específicamente, se desarrolla detalladamente la propuesta gamificada a través de un ejemplo concreto, para la enseñanza de racionalización de monomios.

### Análisis de resultados

#### Descripción de la propuesta didáctica innovadora

La propuesta “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” genera un ecosistema de aprendizaje donde los estudiantes asumen el rol de superhéroes de matemáticas, avanzando a través de cinco niveles (Aprendiz, Racionalizador, Experto, Maestro y Leyenda) cuidadosamente diseñados, para construir una comprensión progresiva con respecto a la temática de racionalización.

#### Datos generales de la propuesta didáctica

La propuesta se estructuró a partir de una narrativa envolvente que contextualizó los conceptos matemáticos en un universo alterno. En la siguiente tabla se mencionan los datos.

**Tabla 1.** Datos generales de la propuesta “Búsqueda Racional: La Liga de los radicales”

Elemento	Descripción
Nombre de la propuesta	Búsqueda racional: La liga de los radicales
Nivel educativo	Educación Secundaria / Bachillerato
Duración estimada	4 sesiones de 45 minutos
Temática central	Racionalización de monomios
Enfoque metodológico	Gamificación con elementos de narrativa fantástica

## Narrativa y contexto del juego relacionado con la propuesta didáctica

Partiendo de una historia en mundo de fantasía se puede lograr una ambientación tanto visual como estética. En este caso, se utilizó una especie de “villanos y superhéroes de matemática”.

### La historia de la “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”

En el reino de Numeria, los Radicales oscuros han sembrado el caos, puesto que todas las expresiones matemáticas aparecen con denominadores irracionales, lo que dificulta la realización de cálculos. Por tal motivo, los estudiantes como miembros de la Liga de los Racionalizadores, han sido convocados para restaurar el orden. Donde, deberán superar desafíos, dominar el arte de la racionalización y enfrentarse al Guardián del caos para devolver la armonía al reino.

### Ambientación visual y estética en la “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”

La propuesta se apoya en una estética de fantasía medieval con elementos matemáticos tales como son: a) Tablero de progreso representado como un mapa del reino, b) Avatares de caballeros, magos o exploradores (personalizables), c) Insignias con diseños de runas matemáticas y d) Efectos visuales y sonoros para los logros y avances. En la siguiente figura se ilustra este ejemplo:

**Figura 1.** Tablero de la “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”



### Objetivos de aprendizaje

Toda propuesta debe contemplar los objetivos de aprendizaje claramente definidos, estructurados y organizados en tres dimensiones fundamentales que abarquen: conocimiento conceptual, habilidades procedimentales y competencias de aplicación. Para esto, es útil apoyarse en la taxonomía de Bloom versión revisada (consúltese, por ejemplo, Anderson & Krathwohl, 2001). Esta clasificación garantiza un aprendizaje holístico que trascienda la mera mecanización de pasos.

**Objetivo general de la “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”**

Al finalizar esta experiencia gamificada, los estudiantes estarán en capacidad de racionalizar expresiones algebraicas cuyos denominadores sean monomios que contienen radicales. Específicamente, comprenderán el significado matemático del proceso; la aplicación correcta de las propiedades de radicales y potencias; además, transferir este conocimiento a contextos problemáticos diversos, tanto sintéticos como de la vida cotidiana. Seguidamente, se describen los objetivos de aprendizajes dentro del marco de las tres dimensiones mencionadas arribas.

**Dimensión 1. Conocimiento conceptual**

Los objetivos conceptuales se centran en la comprensión de los fundamentos teóricos, principios y relaciones que subyacen a la racionalización.

**Tabla 2.** Dimensión 1: Conocimiento conceptual de la “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”

Código	Objetivo conceptual	Nivel taxonomía Bloom	Indicador de logro
C <sub>1</sub>	Describir la naturaleza de los números irracionales y su representación mediante radicales.	Comprender	Define con sus palabras qué es un número irracional y proporciona ejemplos.
C <sub>2</sub>	Explicar el significado matemático de la racionalización como proceso de transformación de expresiones equivalentes.	Comprender	Argumenta por qué al multiplicar numerador y denominador por el mismo factor la expresión original no se altera.
C <sub>3</sub>	Reconocer las propiedades de las potencias de exponente fraccionario y su relación con los radicales.	Comprender	Establece la equivalencia entre $\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{\frac{m}{n}}$ en ejemplos y ejercicios concretos.
C <sub>4</sub>	Diferenciar entre expresiones racionales e irracionales en el contexto de fracciones algebraicas.	Analizar	Clasifica correctamente expresiones dadas según su naturaleza racional o irracional.
C <sub>5</sub>	Justificar la selección del factor racionalizante apropiado según el índice del radical y el exponente del radicando.	Evaluar	Fundamenta por qué determinado factor es el adecuado para racionalizar una expresión específica.
C <sub>6</sub>	Analizar las condiciones de existencia de las expresiones con radicales (dominio de las variables).	Analizar	Determina los valores para los cuales una expresión radical está definida.

**Dimensión. Habilidades procedimentales**

Los objetivos procedimentales se enfocan en la ejecución correcta de los pasos, técnicas y algoritmos involucrados en la racionalización.

**Tabla 3.** Dimensión 2: Habilidades procedimentales de la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”

Código	Objetivo procedimental	Nivel taxonomía Bloom	Indicador de logro
P <sub>1</sub>	Aplicar las propiedades de los radicales (producto, cociente, simplificación) en la manipulación de expresiones algebraicas.	Aplicar	Simplifica correctamente expresiones como $\sqrt{8}$ , $\sqrt[3]{16}$ y $\sqrt{a^3}$ antes de racionalizar.
P <sub>2</sub>	Determinar sistemáticamente el factor racionalizante para monomios de la forma $\frac{k}{\sqrt[n]{a^m}}$ .	Aplicar	Calcula el factor racionalizante para casos como, por ejemplo, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ , $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ y $\frac{2x}{\sqrt[4]{x^3}}$ .
P <sub>3</sub>	Ejecutar el proceso completo de racionalización multiplicando numerador y denominador por el factor racionalizante.	Aplicar	Desarrolla detalladamente la racionalización de expresiones con radicales en el denominador.
P <sub>4</sub>	Simplificar el resultado final de la racionalización hasta obtener la expresión más reducida posible.	Aplicar	Reduce términos semejantes y simplifica radicales después de racionalizar.
P <sub>5</sub>	Racionalizar expresiones que contienen variables en el radicando, considerando las restricciones del dominio.	Aplicar	Resuelve casos como: $\frac{2x}{\sqrt{x}}$ , $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a}}$ y $\frac{3y}{\sqrt[4]{y^3}}$ indicando condiciones de existencia.
P <sub>6</sub>	Verificar la equivalencia entre la expresión original y la racionalizada mediante comprobación numérica o algebraica.	Evaluar	Sustituye valores numéricos (cuando es posible) para confirmar que ambas expresiones son equivalentes.

### Dimensión 3: Competencias de aplicación

Los objetivos de aplicación integran los conocimientos y procedimientos en situaciones más complejas, contextos transversales y problemas auténticos.

**Tabla 4.** Dimensión 3: Competencias de aplicación de la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”

Código	Objetivo de aplicación	Nivel taxonomía Bloom	Indicador de logro
A <sub>1</sub>	Transferir el proceso de racionalización a la resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas más complejas que requieren denominadores racionales.	Aplicar	Utiliza la racionalización como paso intermedio para resolver ecuaciones con radicales.
A <sub>2</sub>	Resolver problemas contextualizados que requieran racionalizar para facilitar cálculos o comparaciones numéricas.	Aplicar	Aborda situaciones como: “Se necesita comparar $\frac{2}{\sqrt{3}}$ y $\frac{2}{\sqrt{5}}$ , ¿cuál es mayor?” racionalizando previamente.
A <sub>3</sub>	Integrar la racionalización con otros contenidos matemáticos (fracciones algebraicas, operaciones combinadas).	Crear	Resuelve expresiones que combinan racionalización con suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas.
A <sub>4</sub>	Comunicar matemáticamente, de forma oral y escrita, los	Crear	Explica a un compañero el proceso seguido, utilizando

	procedimientos y justificaciones del proceso de racionalización.		vocabulario matemático preciso.
A <sub>5</sub>	Colaborar efectivamente en equipos para resolver desafíos de racionalización, asumiendo roles y responsabilidades compartidas.	Aplicar	Participa activamente en los gremios contribuyendo a la solución colectiva de ejercicios.
A <sub>6</sub>	Transferir el pensamiento estratégico desarrollado en los juegos (búsqueda del factor adecuado, verificación de resultados) a nuevas situaciones problemáticas.	Crear	Propone estrategias alternativas de resolución para un mismo ejercicio de racionalización.
A <sub>7</sub>	Evaluar críticamente la validez de diferentes métodos de racionalización y seleccionar el más eficiente según el caso.	Evaluar	Compara distintas formas de abordar un ejercicio y justifica cuál considera más eficiente.

### Elementos de gamificación implementados

Dentro de la planificación con gamificación se deben tomar en cuentas los siguientes aspectos: dinámicas aplicadas, mecánicas implementadas y componentes estéticos. En este sentido, a continuación, se exponen cada una de estas, concretamente para el caso de la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”.

### Dinámicas aplicadas

**Tabla 5.** Dinámicas aplicadas en la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”

Dinámica	Implementación en la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”
Progresión	Los estudiantes avanzan por niveles (rangos) dentro de la Liga, desde “Aprendiz” hasta “Leyenda”.
Competición	Tablas de clasificación por equipos y desafíos semanales entre grupos.
Colaboración	Misiones en equipo para resolver expresiones complejas.
Descubrimiento	Zonas del mapa que se desbloquean al dominar ciertas técnicas.
Influencia y estatus	Rangos visibles y privilegios especiales para los de nivel más alto.

### Mecánicas implementadas

**Tabla 6.** Mecánicas implementadas en la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”

Mecánica	Implementación en la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”
Progresión	5 niveles de dominio: Aprendiz (1), Racionalizador (2), Experto (3), Maestro (4), Leyenda (5).
Puntos de experiencia (XP)	Por tareas completadas, ejercicios correctos y ayudas a compañeros.
Restricción	Para acceder a ciertas misiones se requiere haber superado las anteriores.
Clasificación	Ranking semanal visible en el aula y en plataforma digital.
Retos temporales	Desafíos contrarreloj (versión individual y por equipos).

## Componentes estéticos

**Tabla 7.** Componentes implementados en la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”

Componente	Descripción
Avatares	Personajes personalizables (guerrero, mago, arquero, sanador).
Insignias	Por logros específicos: “Racionalizador veloz”, “Trabajo en equipo”, “Sin errores”, etc.
Puntos de experiencia	Acumulables para subir de nivel.
Barras de progreso	Visualización del avance hacia el siguiente nivel.
Bienes virtuales	“Hechizos” que permiten pistas, tiempo extra o ver la solución paso a paso.
Potenciadores	Multiplicadores de XP (puntos por experiencias) por rachas de respuestas correctas.
Guardián final	Desafío integrador que combina todos los aprendizajes.

## Estructura de la secuencia didáctica

A continuación, se procede a describir cada una de las secciones planificadas para la experiencia gamificadora sobre la “Búsqueda racional: La liga de los radicales”.

### Sesión 1: “El despertar del racionalizador” (Introducción y conceptos base)

**Tabla 8.** Planificación de la Sección 1

Momento	Actividad	Elementos de gamificación	Tiempo
Inicio	Presentación de la narrativa, por ejemplo, video introductorio del reino de Numeria.	Inmersión narrativa, asignación de avatares.	10 min
Activación	Diagnóstico inicial mediante trivía con <i>Kahoot</i> sobre radicales y potencias.	Puntos por participación, <i>ranking</i> instantáneo.	10 min
Desarrollo	Taller “La Torre de los fundamentos”: repaso de propiedades de raíces y potencias fraccionarias.	Misiones individuales con recompensa de XP básica.	15 min
Cierre	Explicación del sistema de niveles y recompensas. Entrega del “Mapa del Reino” (tablero de progreso).	Establecimiento de expectativas.	10 min

### Sesión 2: “El bosque de los monomios” (Racionalización de monomios I)

**Tabla 9.** Planificación de la Sección 2

Momento	Actividad	Elementos de gamificación	Tiempo
Inicio	Recordatorio narrativo: “Debemos atravesar el bosque de los Monomios”.	Inmersión continua.	5 min
Desarrollo guiado	Explicación del concepto de racionalización y factor racionalizante. Ejemplos detallados con apoyo visual.	Desbloqueo de “Técnica básica” en el grimorio personal.	15 min
Práctica	“Camino de los desafíos”: Estaciones con tarjetas de ejercicios de diferente dificultad, por ejemplo: fáciles: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ; medios: $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ ; avanzados: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^3}}$ .	Por cada ejercicio correcto: 10 XP. Rachas: +5 XP extra.	15 min
Cierre	Reflexión y primeros ascensos de nivel. Entrega de insignias “aprendiz” a quienes completen el nivel básico.	Reconocimiento público.	10 min

### Sesión 3: “La cima de los exponentes” (Racionalización de monomios II)

**Tabla 10.** Planificación de la Sección 3

Momento	Actividad	Elementos de gamificación	Tiempo
Inicio	Desafío rápido: “El ataque relámpago” (5 ejercicios en 5 minutos).	Contrarreloj, puntuación doble.	5 min
Desarrollo	Profundización: casos especiales (radicales en numerador y denominador, simplificación previa). Trabajo en equipos.	Colaboración, <i>bonus</i> grupal.	20 min
Práctica	“Torneo de equipos”: competencia por equipos resolviendo ejercicios en pizarra o plataforma.	<i>Ranking</i> de gremios, medallas colectivas.	15 min
Cierre	Balance de puntos. Uso de potenciadores acumulados (canje por pistas para tareas).	Gestión de recursos del juego.	5 min

### Sesión 4: “La fortaleza del caos” (Evaluación y desafío final)

**Tabla 11.** Planificación de la Sección 4

Momento	Actividad	Elementos de gamificación	Tiempo
Inicio	Preparación para el desafío final: activación de potenciadores y estrategia.	Toma de decisiones.	5 min
Desafío final	Enfrentamiento final: Batería de 10 ejercicios de racionalización con dificultad creciente. Cada ejercicio correcto “daña” al Guardián del Caos. Sistema de vidas: 3 errores permitidos.	Narrativa de combate, tensión controlada.	25 min
Corrección	Corrección colaborativa: los estudiantes explican sus estrategias.	Retroalimentación entre pares.	10 min
Cierre y premiación	Ceremonia de graduación: Entrega de diplomas de “Maestro racionalizador”, medallas finales según rango alcanzado.	Celebración, cierre narrativo.	5 min

### Matriz de alineación: Objetivos - Elementos de gamificación - Sesiones

**Tabla 12.** Matriz de alineación de los objetivos, elementos de gamificación y sesiones

Objetivo	Sesión principal	Actividad gamificada	Sistema de recompensa	Evidencia de logro
$C_1, C_2$	Sesión 1	Trivia <i>Kahoot</i> inicial.	XP por participación.	Respuestas correctas en trivia.
$C_3, C_4$	Sesión 1	Torre de los fundamentos.	Insignia “Sabio”.	Ejercicios de clasificación correctos.
$P_1, P_2, C_5$	Sesión 2	Camino de los desafíos.	XP por nivel superado.	Tarjetas de ejercicios resueltos.
$P_3, P_4, A_4$	Sesión 2	Estaciones de dificultad progresiva.	Rachas + <i>bonus</i>	Registro de aciertos consecutivos.
$P_5, P_6, C_6$	Sesión 3	Torneo de Equipos.	<i>Bonus</i> grupal, medallas	Soluciones correctas en equipo.
$A_1, A_2, A_3$	Sesión 4	Guardian final (desafío final).	Rango final, diploma	Batería de 10 ejercicios.
$A_5, A_6, A_7$	Transversal	Misiones colaborativas.	Potenciadores, insignias especiales.	Observación docente.

### Sistema de progresión y recompensa

## Niveles y rangos

**Tabla 13.** Niveles, rangos y desglose operativo por niveles de dominio del sistema de progresión y recompensas

Nivel	Rango	XP requerida	Privilegios	Al completar este nivel, el estudiante será capaz de:
1	Aprendiz	0 – 50	Acceso a misiones básicas.	Reconocer un radical y sus partes (índice, radicando). Identificar cuándo un denominador contiene un radical. Racionalizar expresiones simples del tipo $\frac{k}{\sqrt{a}}$ .
2	Racionalizador	51 – 120	Puede usar 1 potenciador por sesión.	Racionalizar monomios con raíces de cualquier índice ( $\sqrt[3]{}$ , $\sqrt[4]{}$ , etc.). Determinar correctamente el factor racionalizante. Simplificar el resultado aplicando propiedades de radicales
3	Experto	121 – 200	Puede diseñar un ejercicio para el torneo.	Racionalizar expresiones con variables en el radicando. Manejar casos donde el exponente del radicando requiere análisis detallado. Explicar el procedimiento a otros compañeros.
4	Maestro	201 – 300	Derecho a veto en decisiones de equipo.	Resolver expresiones combinadas que involucran racionalización. Transferir la racionalización a contextos problemáticos. Diseñar ejercicios originales para el banco de la clase.
5	Leyenda	301 +	Nombre en el Salón de la Fama.	Enfrentar con éxito cualquier desafío de racionalización de monomios. Evaluar críticamente diferentes estrategias de resolución. Actuar como tutor de compañeros en niveles iniciales.

## Fuentes de XP

**Tabla 14.** Fuentes de XP dentro del sistema de progresión y recompensas

Acción	XP base	Bonus
Ejercicio correcto (individual)	10	+5 si es parte de racha
Ayuda a compañero	15	–
Participación en discusiones	5	–
Victoria en torneo de gremios	30 (equipo)	–
Desafío contrarreloj completado	20	–
Ejercicio explicado en pizarra	25	–

## Insignias especiales

**Tabla 15.** Insignias especiales dentro del sistema de progresión y recompensas

Insignia	Requisito
Mentalista	5 ejercicios consecutivos sin error.
Estratega	Propone un método alternativo de resolución.
Compañero ejemplar	Ayuda a 3 compañeros en una sesión.
Velocista	Completa el desafío relámpago con 100% aciertos.
Leyenda	Alcanza el nivel 5.

**Figura 2.** Insignias especiales de la “Búsqueda racional: La liga de radicales”



## Materiales y métodos

### Recursos físicos

Tarjetas de ejercicios por niveles (formato físico), Tablero de progreso visible en el aula (mapa del reino), Insignias y medallas imprimibles y Diplomas de certificación.

### Recursos digitales (opcional según disponibilidad)

Plataforma *Classcraft* o *Genially* para gamificación, *Kahoot* o *Quizizz* para desafíos rápidos, Pizarra digital interactiva y Códigos QR que enlazan a video tutoriales o pistas.

### Banco de ejercicios graduados

En este espacio se deben diseñar ejercicios secuenciales y con dificultad progresiva para los diferentes niveles, a saber, para el Nivel 1: Aprendiz, Nivel 2: Racionalizador, Nivel 3: Experto, Nivel 4: Maestro y Nivel 5: Leyenda.

## Evaluación

### Evaluación formativa continua

Este tipo de evaluación se puede realizar a través del seguimiento de XP acumulados, Observación de participación y colaboración, y Registro de aciertos/errores por nivel.

### Evaluación sumativa

Esta evaluación está distribuida en los Resultados del Desafío final, Portafolio de ejercicios resueltos (físico o digital) y Autoevaluación mediante rúbrica.

Dimensión	Nivel 1 (Explorador)	Nivel 2 (Aprendiz)	Nivel 3 (Racionalizador)	Nivel 4 (Maestro)	Nivel 5 (Leyenda)
Conceptual	Reconoce un radical pero no diferencia entre racional e irracional.	Identifica expresiones irracionales pero no justifica el proceso.	Explica el significado de la racionalización con apoyo.	Fundamenta autónomamente la selección del factor racionalizante.	Analiza críticamente la validez de diferentes métodos.
Procedimental	Intenta aplicar el proceso pero comete errores frecuentes.	Racionaliza casos simples con ayuda.	Ejecuta correctamente casos de cualquier índice.	Resuelve con precisión expresiones con variables.	Verifica y corrige sus procedimientos autónomamente.
Aplicación	Requiere guía para transferir a nuevos contextos.	Aplica en contextos similares a los trabajados.	Transfiere a problemas contextualizados.	Integra con otros contenidos matemáticos.	Propone estrategias alternativas y creativas.

### Rúbrica de autoevaluación para el estudiante

Tabla 18. Rúbrica de autoevaluación para el estudiante

Criterio	Lo logré (3)	En proceso (2)	Requiero apoyo (1)
Identifico el factor racionalizante adecuado.			
Aplico correctamente las propiedades de radicales.			
Realizo las operaciones algebraicas sin errores.			
Colaboro con mis compañeros en los desafíos.			
Explico el procedimiento a otros.			

### Adaptaciones y atención a la diversidad

#### Para estudiantes con dificultades de aprendizaje

Tarjetas con apoyos visuales y pasos secuenciados, Potenciadores específicos: “Pista del sabio” (ayuda adicional) y Posibilidad de alianza con un compañero tutor.

#### Para estudiantes con alto rendimiento

Desafíos ocultos (misiones secretas con XP extra), Rol de “ayudante del maestro” para explicar ejercicios y Creación de ejercicios para el banco de la clase.

#### Para estudiantes con necesidades educativas especiales

Adaptación de materiales (por ejemplo, letra grande, contraste visual), Flexibilidad en tiempos de respuesta y Evaluación diferenciada según necesidades.

## Discusión

En esta sección se expone la discusión de los resultados obtenidos en el apartado anterior. Específicamente, se comienza presentando el análisis de los conceptos matemáticos implicados en la racionalización de monomios, seguido de la identificación de los obstáculos cognitivos documentados, la fundamentación teórica de la

gamificación y, finalmente, la integración de estos hallazgos en la propuesta didáctica “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”.

Primero, el *análisis epistemológico de los conceptos matemáticos implicados* permitió identificar seis conceptos fundamentales en la racionalización de monomios: números irracionales y radicales, propiedades de las raíces, potencias de exponente fraccionario, factor racionalizante, equivalencia de expresiones algebraicas y operaciones con radicales. Como señala Kieran (2007), la dificultad de este tópico no reside en un concepto aislado, sino en la integración y coordinación de múltiples conceptos que demandan una alta carga cognitiva. Esta complejidad estructural justifica un enfoque didáctico que permita practicar cada componente por separado antes de integrarlos, así como sistemas de retroalimentación inmediata y práctica espaciada (Kapp, 2012).

Segundo, con respecto al *análisis de los obstáculos cognitivos documentados*, la revisión de la literatura permitió identificar siete categorías de obstáculos: comprensión limitada de números irracionales, dificultades con propiedades de potencias y raíces, mecanización sin significado, dificultad para identificar el factor racionalizante, errores en manipulación algebraica, falta de conexión con conocimientos previos y ansiedad matemática (Kieran, 2007; Sfard, 1991; Hanus & Fox, 2015; Farías *et al.*, 2021), Abancin y Castillo, 2022; Abancin *et al.*, 2022). Estos hallazgos establecen requisitos de diseño claros, donde la propuesta debe promover la comprensión conceptual mediante narrativa, ofrecer práctica graduada, reducir la penalización del error y explicitar las conexiones con conocimientos previos (Bai *et al.*, 2020).

Tercero, el *análisis de los principios de gamificación aplicables* a partir del modelo ARCS de Keller (1987), se identificaron cuatro principios fundamentales: atención (capturar el interés mediante narrativa), relevancia (conectar el contenido con los intereses del estudiante), confianza (generar expectativas claras y retroalimentación) y satisfacción (ofrecer recompensas y reconocimiento). Como sostiene Kapp (2012), la gamificación efectiva integra orgánicamente estos principios con el contenido de aprendizaje, de modo que la motivación por jugar se convierte en motivación por aprender.

Cuarto, a partir del *análisis de las teorías del aprendizaje que sustentan la gamificación* se destaca que la gamificación se sustenta en tres perspectivas complementarias: el constructivismo (Piaget, 1970; Jonassen, 1991), que enfatiza la construcción activa del conocimiento mediante la resolución de desafíos; el conectivismo (Siemens, 2004, 2006), que concibe el aprendizaje como establecimiento de conexiones conceptuales y

sociales; y la teoría sociocultural (Vigotsky, 1978), que aporta el concepto de zona de desarrollo próximo y la importancia del andamiaje. La integración de estas tres teorías proporciona un marco sólido para justificar decisiones de diseño como los niveles progresivos, el trabajo colaborativo en gremios y el sistema de potenciadores.

Quinto, el *análisis de los elementos de gamificación implementados* siguiendo la taxonomía de Werbach y Hunter (2012), la propuesta “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” incorpora: dinámicas (progresión por niveles, competición entre gremios, colaboración en equipos, descubrimiento de zonas del mapa, influencia y estatus mediante rangos visibles); mecánicas (puntos de experiencia, clasificaciones, restricciones para desbloquear niveles, relaciones de equipo); y componentes estéticos (avatares personalizables, insignias por logros, narrativa fantástica del Reino de Numeria, potenciadores estratégicos y un Desafío final integrador). Cada elemento fue seleccionado en función de su capacidad para abordar los obstáculos cognitivos identificados y promover los principios motivacionales establecidos.

Sexto, la *integración de resultados en la propuesta didáctica* consolidada por la articulación de los hallazgos anteriores condujo al diseño de “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” una experiencia gamificada estructurada en cinco niveles de dominio (Aprendiz, Racionalizador, Experto, Maestro y Leyenda), donde los estudiantes acumulan puntos de experiencia, obtienen insignias, utilizan potenciadores y culminan en un Desafío final que integra todos los aprendizajes. La coherencia interna de la propuesta fue verificada mediante matrices de alineación que cruzaron objetivos de aprendizaje, elementos de gamificación y fundamentos teóricos, confirmando que cada decisión de diseño responde a un problema identificado y se sustenta en la literatura especializada (Collins *et al.*, 2004; Wang & Hannafin, 2005).

En adición, se destaca que la propuesta “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” integra los principios de la gamificación fundamentados en las teorías del aprendizaje previamente expuestas. En primer lugar, desde el constructivismo, los estudiantes construyen activamente su comprensión de la racionalización al enfrentar desafíos progresivos que requieren la aplicación de conocimientos previos y la generación de nuevas estrategias (Jonassen, 1991; Piaget, 1970); Este enfoque se materializa en la estructura de niveles de la propuesta, donde cada etapa exige que el aprendiz integre lo aprendido previamente para avanzar, para promover una construcción gradual y significativa del conocimiento.

En segundo lugar, desde el conectivismo, se fomenta el establecimiento de conexiones

entre conceptos (radicales, potencias, factor racionalizante) y entre personas (trabajo colaborativo en gremios). Como señala Siemens (2004, 2006), el aprendizaje en la era digital ocurre a través de la capacidad de establecer conexiones relevantes; en “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales”, los estudiantes no solo vinculan ideas matemáticas, sino que también construyen redes de apoyo colaborativo que enriquecen el proceso de aprendizaje.

En tercer lugar, desde la teoría sociocultural de Vigotsky (1978), la colaboración en equipos y la interacción con pares más avanzados facilita la internalización de conceptos dentro de la zona de desarrollo próximo. Los gremios y el sistema de potenciadores actúan como andamiajes que permiten a los estudiantes resolver desafíos que, de otra forma, estarían fuera de su alcance individual, lo cual promueve el avance hacia niveles superiores de competencia.

En cuarto lugar, en cuanto a los elementos de gamificación, se articulan mecánicas (puntos, niveles, clasificaciones), dinámicas (progresión, competición, colaboración) y componentes estéticos (narrativa, avatares, insignias) para generar una experiencia inmersiva que aborda tanto la motivación extrínseca como intrínseca (Werbach & Hunter, 2012). Esta articulación tridimensional asegura que el aprendizaje no dependa exclusivamente de recompensas externas, sino que el propio desarrollo de la historia y la superación de desafíos se conviertan en fuentes de satisfacción personal.

En quinto lugar, respecto a los obstáculos cognitivos, la propuesta los enfrenta mediante: a) la práctica graduada que evita la mecanización sin significado, lo que permite que cada nivel consolide la comprensión antes de avanzar (Kieran, 2007); b) el trabajo colaborativo que permite abordar las dificultades entre pares, reduciendo la sensación de aislamiento ante el error; c) la narrativa lúdica que reduce la ansiedad matemática al transformar un contenido abstracto en una aventura significativa (Hanus & Fox, 2015); y d) la retroalimentación inmediata que corrige errores conceptuales en el momento mismo en que ocurren, evitan la consolidación de prácticas incorrectas (Kapp, 2012).

En términos generales, “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” constituye una propuesta coherentemente fundamentada donde cada decisión de diseño responde a un problema identificado en la literatura y se sustenta en marcos teóricos reconocidos. Esto ofrece una herramienta potencialmente eficaz para la enseñanza de la racionalización de monomios.

## Conclusiones

La “Búsqueda Racional: La Liga de los Radicales” constituye una propuesta didáctica innovadora que transforma el aprendizaje de la racionalización de monomios en una experiencia motivadora, significativa y adaptada a las necesidades de los estudiantes del siglo XXI. Al integrar los principios de la gamificación con una sólida fundamentación teórica —constructivismo, conectivismo y teoría sociocultural—, la propuesta no solo persigue la adquisición de un procedimiento matemático, sino el desarrollo de habilidades cognitivas superiores, competencias colaborativas y una actitud positiva hacia las matemáticas (Kapp, 2012; Werbach & Hunter, 2012).

Los resultados del análisis confirman que la articulación de mecánicas (puntos, niveles, clasificaciones), dinámicas (progresión, competición, colaboración) y componentes estéticos (narrativa, avatares, insignias) permite abordar simultáneamente los principales obstáculos cognitivos documentados en el aprendizaje de la racionalización. Específicamente, la mecanización sin significado, las dificultades con las propiedades de radicales y potencias, y la ansiedad matemática (Kieran, 2007; Sfard, 1991; Hanus & Fox, 2015). La práctica graduada, el trabajo colaborativo en gremios, la narrativa lúdica y la retroalimentación inmediata constituyen los mecanismos centrales mediante los cuales la propuesta mitiga estas dificultades.

Asimismo, la flexibilidad de la propuesta permite su implementación tanto en entornos presenciales como híbridos, con recursos físicos o digitales, constituyéndose como una herramienta versátil al servicio de la innovación educativa en el área de matemáticas. No obstante, se reconoce como limitación que la propuesta se encuentra en fase de diseño teórico, por lo que futuras líneas de investigación deberían abordar su implementación empírica para evaluar su impacto real en el rendimiento académico, la motivación y la reducción de la ansiedad matemática en poblaciones estudiantiles concretas.

## Referencias Bibliográficas

- Abancin Ospina, R. A., & Castillo Marrero, Z. N. (2022). Tipificación de errores en evaluaciones matemáticas de un primer curso universitario. *Explorador Digital*, 6(3), 6-27. <https://doi.org/10.33262/exploradordigital.v6i3.2196>
- Abancin Ospina, R. A., Castillo Marrero, Z. N., Andrés Eloy Salazar Domínguez, & Valverde Aguirre, P. E. (2022). *Reflexiones sobre los aspectos que influyen en la popularidad de las ciencias*. *Conciencia Digital*, 5(1.3), 148-167.



<https://doi.org/10.33262/concienciadigital.v5i1.3>

- Adams, E. (2014). *Fundamentals of game design* (3rd ed.). New Riders.
- Anderson, W. & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives* (Complete ed.). Longman.
- Bai, S., Hew, K. F., & Huang, B. (2020). Does gamification improve student learning outcome? Evidence from a meta-analysis and synthesis of qualitative data in educational contexts. *Educational Research Review*, 30, 100322. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2020.100322>
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Bycer, J. (2018). *Game design deep dive: Boss fights*. Gamasutra. <https://www.gamasutra.com>
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42. [https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2)
- Deterding, S., Dixon, D., Khaled, R., & Nacke, L. (2011). From game design elements to gamefulness: Defining “gamification”. *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference: Envisioning Future Media Environments*, 9-15. <https://doi.org/10.1145/2181037.2181040>
- Farías, D., Abancin, R.; Pérez, J. (2021). Potenciación en el aula de clases en estudiantes que inician estudios superiores. *Revista Paradigma Vol. XLII, Nro. 2*, 110-129. DOI: <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p110-129.id958>
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Hanus, M. D., & Fox, J. (2015). Assessing the effects of gamification in the classroom: A longitudinal study on intrinsic motivation, social comparison, satisfaction, effort, and academic performance. *Computers & Education*, 80, 152-161. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.08.019>
- Hunicke, R., LeBlanc, M., & Zubek, R. (2004). MDA: A formal approach to game design and game research. *Proceedings of the AAAI Workshop on Challenges in Game AI*, 4(1), 1-5.
- Jonassen, D. H. (1991). *Evaluating constructivistic learning*. *Educational Technology*, 31(9), 28-33.
- Jonassen, D. H. (1994). Thinking technology: Toward a constructivist design model.



*Educational Technology*, 34(4), 34-37.

Jonassen, D. H. (1999). *Constructivist learning environments: Designing technologies to support learning*. Educational Technology Publications.

Kapp, K. M. (2012). *The gamification of learning and instruction: Game-based methods and strategies for training and education*. Pfeiffer.

Kalogiannakis, M., Papadakis, S., & Zourmpakis, A. I. (2021). Gamification in science education. *A systematic review of the literature. Education Sciences*, 11(1), 22. <https://doi.org/10.3390/educsci11010022>

Keller, J. M. (1987). Development and use of the ARCS model of instructional design. *Journal of Instructional Development*, 10(3), 2-10.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Information Age Publishing.

Kitchenham, B., & Charters, S. (2007). *Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering* (Technical Report EBSE-2007-01). Keele University.

Koivisto, J., & Hamari, J. (2019). The rise of motivational information systems: A review of gamification research. *International Journal of Information Management*, 45, 191-210. <https://doi.org/10.1016/j.ijinfomgt.2018.10.013>

Kuo, M. S., & Chuang, T. Y. (2016). How gamification motivates visits and engagement for online academic dissemination: An empirical study. *Computers in Human Behavior*, 55, 16-27. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2015.08.025>

Maslow, A. H. (1943). A theory of human motivation. *Psychological Review*, 50(4), 370-396.

Piaget, J. (1970). *Psicología y pedagogía*. Ariel.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>

Siemens, G. (2004). *Connectivism: A learning theory for the digital age*. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, 2(1), 3-10.

Siemens, G. (2006). *Connectivism: Learning and knowledge today*. EducationAU.

Sun, J. C. Y., & Hsieh, P. H. (2018). Gamification in education: A study of the effects of gamification on students' learning motivation and achievement. *Journal of Educational Computing Research*, 56(6), 819-843.



- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68-78. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68>
- Vigotsky, L. S. (1978). El papel del juego en el desarrollo. En *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 53(4), 5-23.
- Werbach, K., & Hunter, D. (2012). *For the win: How game thinking can revolutionize your business*. Wharton Digital Press.

**Conflicto de intereses:**

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

**Financiamiento:**

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

**Agradecimiento:**

Los autores expresan su agradecimiento a la Carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), apoyo que fue fundamental para la realización de esta investigación, enmarcada en el proyecto de vinculación titulado: “Aplicación de metodologías innovadoras para la enseñanza de matemática en el nivel básico superior de la Unidad Educativa Simón Rodríguez de la Parroquia Lican”. Adicionalmente, este trabajo agradece el respaldo brindado por el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación (DCE) de la Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez (UNERS). Ambas instituciones fueron fundamentales para la realización de esta investigación.

**Nota:**

El artículo no es producto de una publicación anterior.